Primitives de Fonctions – Calcul Intégral

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Primitives d'une fonction numérique :

1- Activité : Soit la fonction f : x $\mapsto$ 2x + 3 ;

Calculer la dérivée de chacune des fonctions F ; G ; H définies par :

$F(x) = x^2 + 3x + 10$; $G(x) = x^2 + 3x - 17$; $H(x) = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + 11$. Que remarque-t-on ?

- ✓ Pour tout x de $\mathcal{D}$f , F'(x) = f (x) ; G'(x)= f (x) ; H'(x) = f (x).

On dit que F ; G ; H sont des primitives de f sur $\mathcal{D}$f.

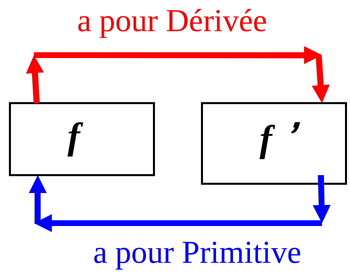
2- Définition :

Soit f une fonction définie sur une partie non vide [a ; b] de ℝ. On appelle fonction primitive de f sur [a ; b], toute fonction F telle que :

$$\forall\ x \in [a\ ;\ b]\ ,\ F'(x) = f\ (x).$$

3- Notations: $\underset{[a;b]}{\mathrm{Prim}}\, f = F$ ou $\int f(x)dx = F(x)$; .

[Prim f = F] $\Leftrightarrow$ [$\forall$ x ∈ [a ; b] , F'(x) = f (x)]



4- Remarques :

- Si f est continue sur [a ; b] alors sa primitive F est continue sur [a ; b] (car F est dérivable sur [a ; b]).
- Les fonctions qui à x $\mapsto$F(x) + C (C∈ℝ) sont appelées les primitives de f sur [a ; b]

5- Théorème (admis) :

a) Si F est une primitive de f sur [a ; b], toute autre primitive G de f sur [a ; b] est de la forme : G(x) = F(x) + C.

b) Si f admet de primitives sur [a ; b], il en existe une et une seule prenant au point x_0 donné une valeur y_0 donnée.

Exemple : Soit la fonction f définie par f(x)= cosx. Trouver la primitive F de f qui s'annule pour x = $\frac{\pi}{4}$ et celle qui prend la valeur 2 pour x = $\frac{3\pi}{4}$.

6- Propriétés :

Soient f et g deux fonctions définies sur [a ; b] ; F et G leurs primitives respectives sur [a ; b] .

a) Prim (f+g) = Prim (f) + Prim (g) = F + G + C^{ste}.

b) Soit α un réel, Prim (α f) = α Prim (f).

c) Prim (f'$\times$g) = [f$\times$g]–Prim (f$\times$g') *(appelée Formule de primitivation par parties)*.

Exemple : Trouver les primitives de f définie par f(x) = x sinx.

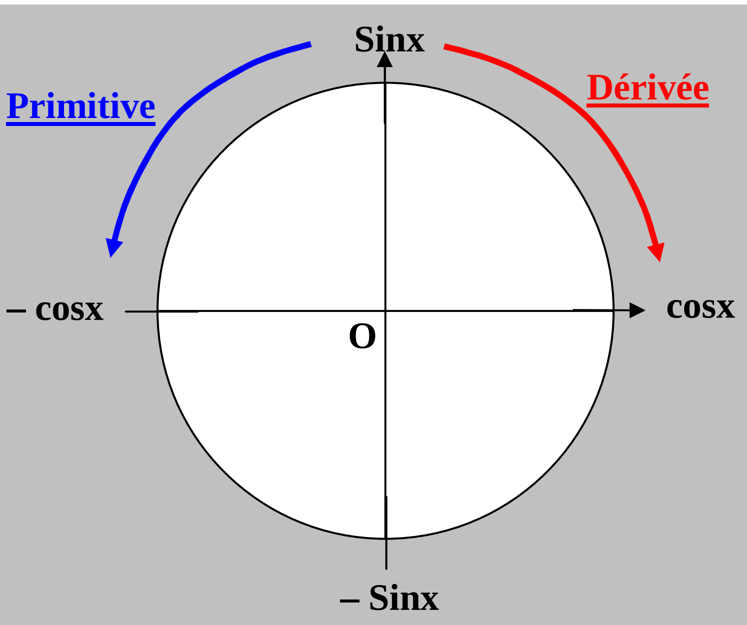
7- Calcul de Primitives :

a) Primitives de fonctions usuelles:
Soient f ; u et v des fonctions numériques.

Fonctions f définies par	Fonctions Primitives F
f(x) = 0	F(x) = c
f(x) = a	F(x) = a x + c
f(x) = a x ^{n}	$F(x) = \frac{a\,x^{n+1}}{n+1} + c$
f(x) = $\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + c$
f(x) = x ^{r}	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
f(x) = (x–a)^m ; m ≠ -1	$F(x) = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + c$
F(x) = (a x + b)^n; n ≠ -1	$F(x) = \frac{(a\,x+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$
f(x) = $\frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln\lvert u(x)\rvert + c \quad ; \quad u(x) \neq 0$
f(x) = $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = \sqrt{u(x)} + c \quad ; \quad u(x) \succ 0$
f(x) = $\frac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}$	$F(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + c \quad ; \quad v(x) \neq 0$
f(x) = u'(x).u^n(x)	$F(x) = \frac{U^{n+1}(x)}{n+1} + c$
f(x) = $\frac{u'(x)}{(u(x))^n}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}} + c \quad ; \quad n \neq 1$

b) Primitives de fonction circulaires :

N.B : Cette nouvelle technique que je mets à votre disposition vous permettra de retenir le plus simplement possible la dérivée et la primitive des fonctions Sinus et Cosinus



Fonction f définies par	Fonctions Primitives F
f (x) = cosx	F(x) = sinx + c
f (x) = cos (ax + b)	F(x) = $\frac{1}{a}$sin (ax + b) + c
f (x) = sinx	F(x) = – cosx + c
f (x) = sin (ax + b)	F(x) = $-\frac{1}{a}$ cos (ax + b) + c
f (x) = $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	F(x) = tgx + c
f (x) = $\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	F(x) = $\frac{1}{a}$ tg (ax + b) + c
f (x) = $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$	F(x) = – cotgx + c
f (x) = $\frac{1}{\sin^2(ax+b)}$	F(x) = $-\frac{1}{a}\cot g(ax+b)+c$

c) Cas divers :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

f(x) = cos2xsin3x ; h(x) = $\cos^4$x ; f(x) = $\frac{1}{\cos^4 x}$.

(Méthodes utilisées: linéarisation, transformations trigonométriques)

$f(x) = \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \times \tan^2 x$ d'où

$F(x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$

d) Primitives de $\sin^n x \times \cos^p x$ où n et p sont des entiers naturels non nuls :

- **Si n ou p est impaire :** $f(x) = \cos^5 x \sin^8 x$.

  (prendre la puissance impaire $\cos^5$x = cosx$\cos^4$x**) ;**

  d'où f(x)= cosx$\sin^8$x–2cosx$\sin^{10}$x+cosx$\sin^{12}$x et on a

  F(x) = $\frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{11}\sin^{11} x + \frac{1}{13}\sin^{13} x + c$.

- **Si n et p sont paires :** (utiliser les relations suivantes)

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

Exemples : $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$; $h(x) = \sin^2 x \cos^2 x$.

II – Calcul Intégral :

1- Définition : Soit F une primitive d'une fonction f sur [a ; b].
On appelle intégrale définie de f sur [a ; b] le réel noté :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

2- Théorèmes : on admettra les théorèmes suivants

a) Théorème 1: Toute fonction continue sur [a ; b] est intégrable sur [a ; b].

b) Théorème 2: Toute fonction monotone et bornée sur [a ; b] est intégrable sur [a ; b].

3- Propriétés :

a) $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$;

b) $\int_a^a f(t)dt = 0$;

c) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$;

d) $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;

e) $\int_a^b \lambda\, f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$;

f) Si $f \geq 0$ sur [a ; b] ; alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$;

g) Si $f \geq$ g sur [a ; b] ; alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$;

h) $\int_a^b f'(t)dt = [\,f(t)\,]_a^b = f(b) - f(a)$.

4- Définition :
On appelle **moyenne de l'intégrale sur [a ; b]** le nombre :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

5- Intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions dérivables donc continues sur [a ; b] .

(u v)' = u'v – v'u ⇔ Prim(u'v)= [uv] – Prim(uv') donc pour tout x ϵ [a ; b] , on a :

La formule d'intégration par parties

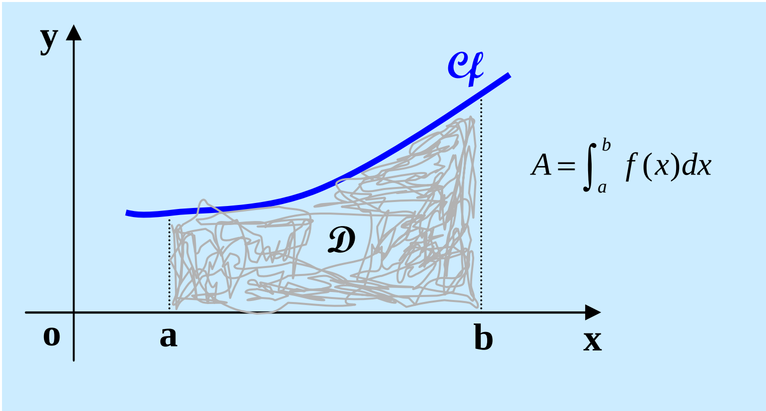
$$\int_a^b U(x)\times V'(x)\;dx = \left[U(x)\times V(x)\right]_a^b - \int_a^b U'(x)\times V(x)\,dx.$$

Exemples : Soient $I = \int_0^x t\cos t\;dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

III – Applications du Calcul Intégral :

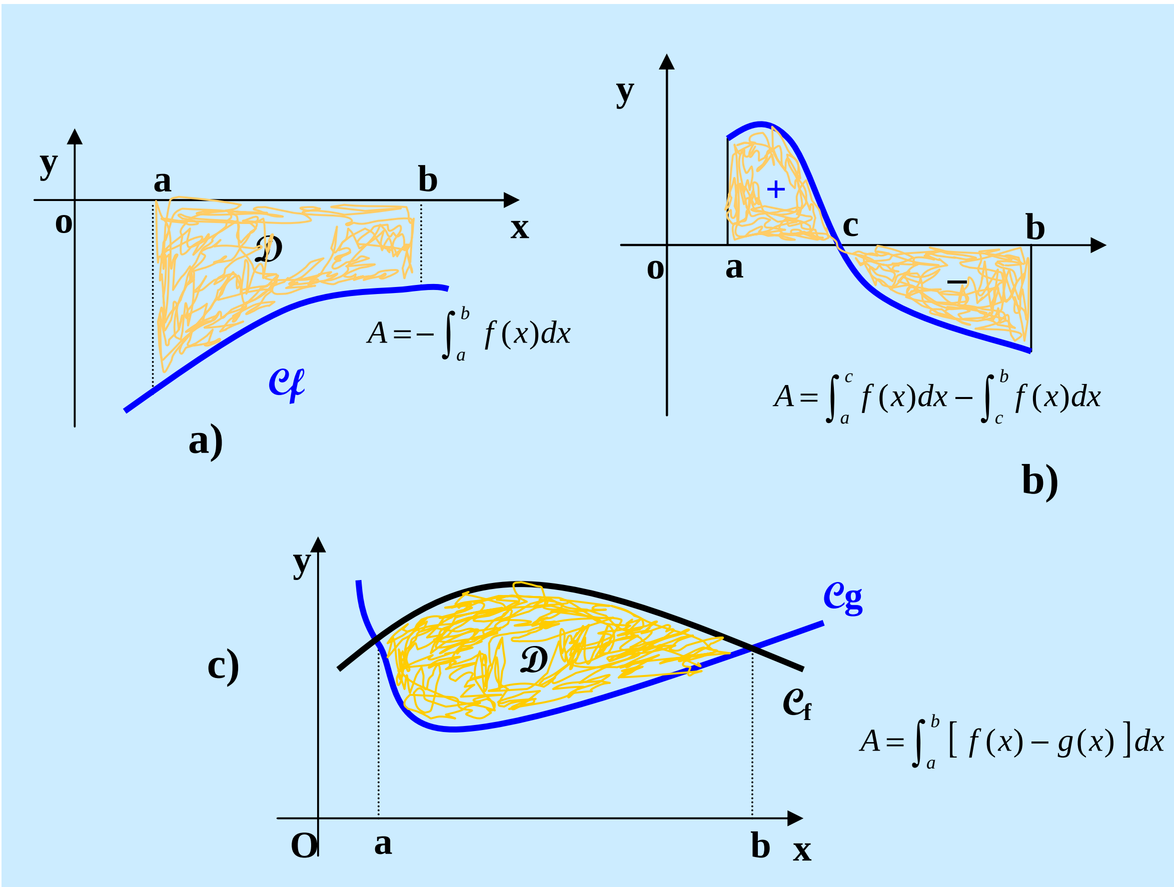
1. Calcul d'aires :

Si f est intégrable et positive sur [a ; b] , $\int_a^b f(x)dx$ donne l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ compris entre l'axe des abscisses, la droite d'équation x = a ; x = b et la courbe ($\mathcal{C}$f) de f sur [a ; b].



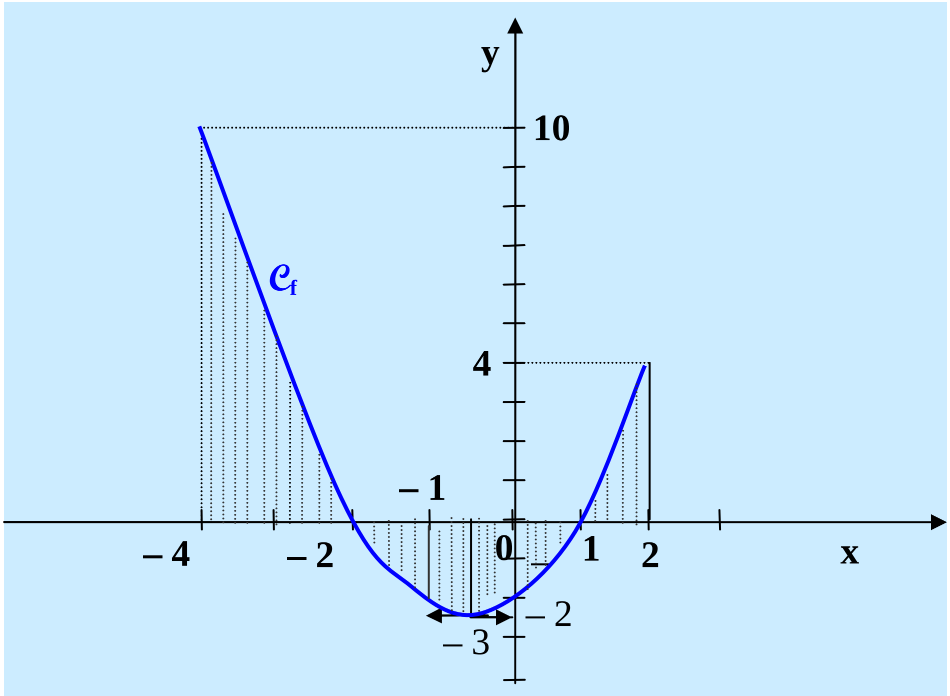
2- Conséquences :

Les configurations ci-dessous nous donnent les aires des domaines $\mathcal{D}$.



Exemple :

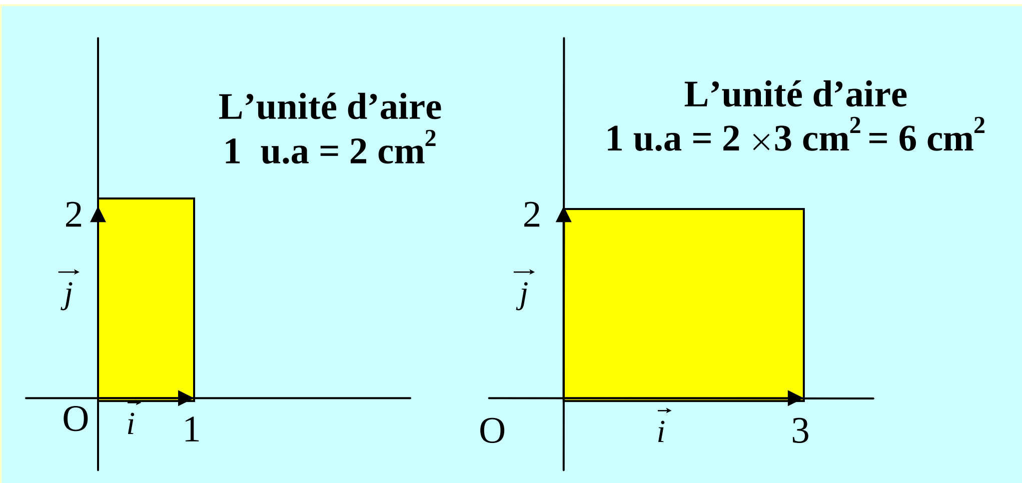
Soit la fonction f définie sur [– 4 ;2] par $f(x) = x^2 + x - 2$.Soit ($\mathcal{C}$f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par l'axe des abscisses les droites d'équations x = – 4 ; x = 2 et par la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.



f est positive sur [–4 ; –2] et sur [1 ; 2] ; f est négative sur [–2 ;1] ; On a :

$$A = \int_{-4}^{-2} f(x)dx - \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = 15\,u.a\ .$$

3- Unité d'aire :
L'aire d'un domaine est mesurée en unité d'aire (U.a).

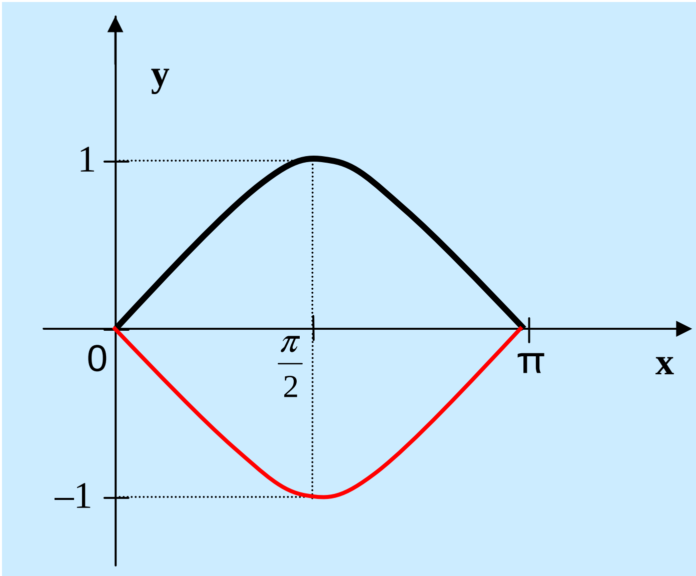


4- Volume d'un solide de révolution :

a) Théorème 3 : Le volume engendré par une aire plane limitée par l'axe (x'ox), les droites d'équations x = a ; x = b (a < b) et l'arc de courbe d'équation y = f(x) est donné la formule :

$$V = \pi \int_a^b [\, f(x) \,]^2 \, dx$$

b) Exemple : Le volume limité par l'arc de sinusoïde d'équation y = sinx, x ϵ [0 ; π] tournant autour de l'axe (ox).



$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

IV – Changement de variable affine :

Soient f et g deux fonctions où g est une fonction affine définie par g(x) = ax + b.

L'intégrale de la forme : $\int_m^n f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \int_{am+b}^{an+b} f(u)\,du$.

En effet en posant : u = ax + b alors du = a dx et dx = $\frac{1}{a}$ du.

Cherchons les nouvelles bornes

u = ax + b $\begin{cases} Si \quad x = m \quad alors \quad u = am + b \\ Si \quad x = n \quad alors \quad u = an + b \end{cases}$.

<u>Exemple ;</u>

Soit à calculer $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$. On pose u = 2x +1 ⇒ du = 2dx et dx = $\frac{1}{2}$du.

$2x = u - 1 \Rightarrow x = \frac{u-1}{2}$. Donc cherchons les nouvelles bornes :

$$\begin{cases} Si \quad x = 0 \quad alors \quad u = 1 \\ Si \quad x = 1 \quad alors \quad u = 3 \end{cases} \quad par \quad suite \quad on \quad obtient \quad I = \frac{1}{3}.$$

V – Valeur approchée d'une intégrale (méthode des rectangles) :

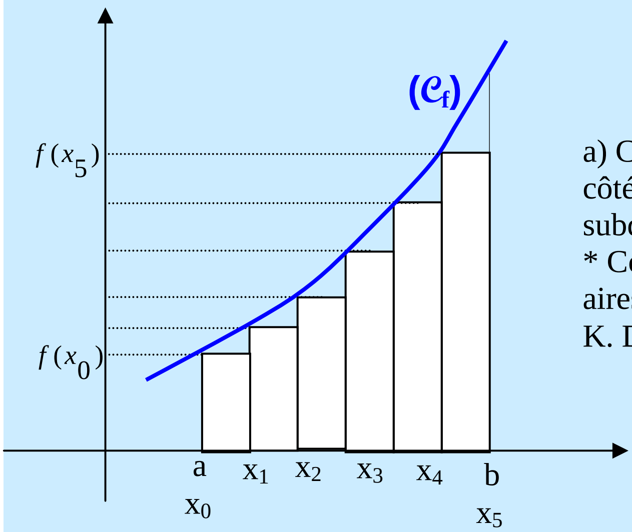
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et [a ; b] $\subset$ I.
Supposons que f ne possède pas de primitives connues.
Cherchons une valeur approchée de $K = \int_a^b f(t)dt$.

Activité 1 : Partageons [a ; b] en n intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$ (ou n subdivisions égales). Déterminer les bornes : x_0 ; x_1 ; x_2 ; …. ; x_n de ces intervalles.

Réponses:

$x_0 = a$; $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$; $x_2 = a + 2\frac{(b-a)}{n}$; …. ; $x_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n}$; $x_n = a + n\,\frac{(b-a)}{n} = b$.

Activité 2 : f est donnée par sa représentation graphique ci-dessous.



a) Construire dans le plan les rectangles de côtés $(x_i - x_{i-1})$ et $f(x_{i-1})$ dans le cas (n = 5) subdivisions.
* Comparez dans le plan la somme K_1 des aires de ces rectangles et l'aire que représente K. Donnez l'expression de K_1.

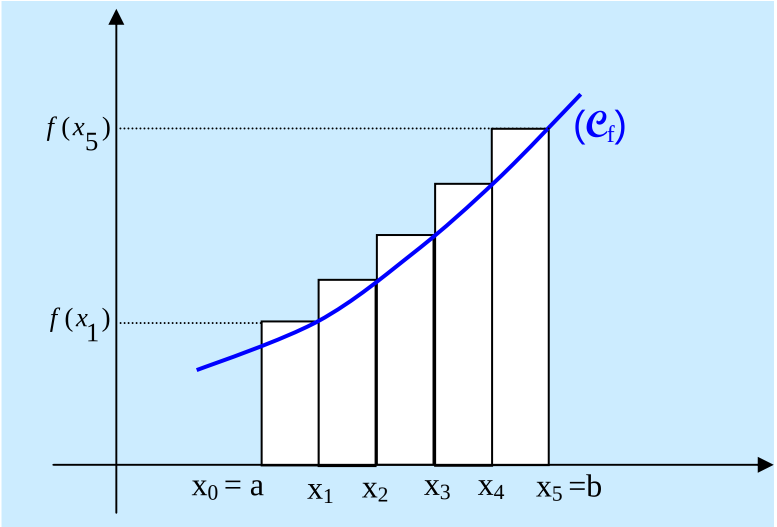
Réponses : $K_1 \leq K$ et $K_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_{i-1})$.

Posons j = i –1

$$\begin{cases} pour \quad i=1, \quad j=0 \\ pour \quad i=n\ , \quad j=n-1 \end{cases} \Rightarrow K_1 = \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Leftrightarrow K_1 = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\ car\ i\ et\ j\ sont$$

des variables muettes.

b) même questions pour les rectangles de côtés ($x_i - x_{i-1}$) et f (x_i).



K ≤ K_2 ;

$$K_2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_i) \quad \Leftrightarrow \quad K_2 = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i).$$

c) Donner un encadrement de K.

$K_1 \leq K \leq K_2 \quad \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$.

On dit que $\mathbf{K_1}$ et $\mathbf{K_2}$ sont deux valeurs approchées de **K** obtenues par la méthode des rectangles.

Remarque :

Si f est monotone sur [a ; b] ces deux valeurs approchées réalisent un encadrement de **K**. Par contre si f n'est pas monotone ce n'est plus le cas.(on ne pas préciser laquelle des deux valeurs $\mathbf{K_1}$ ou $\mathbf{K_2}$ est la meilleur valeur approchée de **K**). Ceci nous amène à étudier l'erreur commise en remplaçant **K** par l'une de ces valeurs approchées.

L'erreur **e** commise est telle que : |**e**| ≤ $M\frac{(b-a)^2}{2n}$**,** où **M** est un majorant de $|f'(x)|$ sur [a ; b] et n le nombre de subdivisions.

Exemple : Soit à calculer $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$. Donner un encadrement de K puis une valeur approchée de K en utilisant la méthode des rectangles pour n = 10 subdivisions.

---- 0 ----

Posons $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; 0 ≤1 ⇒ $f(0) \geq f(1)$ donc f est décroissante sur [0 ; 1] et on a :

$K_2 \le K \le K_1$. Pour n = 10 on a : $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

Posons $d_2(f(x_i))$ = approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $f(x_i)$.
Et $e_2(f(x_i))$ = approximation décimale d'ordre 2 par excès de $f(x_i)$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totaux
x_i	0	1/10	2/10	3/10	4/10	5/10	6/10	7/10	8/10	9/10	1	
$d_2(f(x_i))$		0,99	0,96	0,91	0,86	0,80	0,73	0,67	0,60	0,55	0,50	7,57
$e_2(f(x_i))$	1	1	0,97	0,92	0,87	0,81	0,74	0,68	0,61	0,56		8,16

$$K_2 = \frac{1}{10}\times 7{,}57 = 0{,}757 \quad ; \qquad K_1 = \frac{1}{10}\times 8{,}16 = 0{,}816 .$$

D'où l'encadrement de K est : $0{,}757 \le K \le 0{,}816$.

Donc une valeur approchée de K est :

$$K = \frac{K_2 + K_1}{2} = 0{,}7865 \quad ; \quad K \approx 0{,}79 \ \text{à}\ 10^{-2} \ \text{près} \ (\text{arrondi d'ordre } 2).$$

---- 0 ----

$K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$; posons $x = \tan\alpha \Rightarrow dx = (1 + \tan^2\alpha)\, d\alpha$.

$$x^2 = \tan^2\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 = 1 + \tan^2\alpha \ .$$

Nouvelles bornes : $x = \tan\alpha$ $\begin{cases} si \quad x=0 \quad alors \quad \tan\alpha = 0 \ \Rightarrow \ \alpha = 0 \\ Si \quad x = 1 \quad alors \quad \tan\alpha = 1 \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

D'où $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)}\, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\alpha = [\alpha]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785 \approx 0{,}79$.

VI – Majoration de l'intégrale d'une fonction continue :

1) Théorème : Supposons **a< b** et f une fonction continue sur [a ; b].

Alors on a : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$.

Preuve

En effet nous avons : $-|f(t)| \le f(t) \le |f(t)|$ d'où par croissance de l'intégrale $\int_a^b -|f(t)|dt \le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b |f(t)|dt$ or $\int_a^b -|f(t)|dt = -\int_a^b |f(t)|dt$ donc $-\int_a^b |f(t)|dt \le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b |f(t)|dt$ d'où $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$.

2) Inégalité de la moyenne :

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle **I**, **m** et **M** des nombres réels, a et b des éléments de **I**.

- Si **m** $\le f \le$ **M** sur **I** et si **a≤b** alors **m(b–a)** $\le \int_a^b f(t)\,dt \le$ **M(b–a)** ;
- Si **|** f **'|≤M** sur **I** alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le M(b-a)$.