# *Suites Numériques*

*Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako*

## I – Généralité sur les suites:

### 1- Principe du raisonnement par récurrence :

Soit la propriété P(n) dépendant de l'indice n.

Si les propositions $\begin{cases} (1) \quad P(0) \\ (2) \quad \forall k \in IN; P(k) \Rightarrow P(k+1) \end{cases}$ sont toutes deux vraies, alors la propriété P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

**Exemple :** Démontrer par récurrence l'égalité P(n) suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}$ , P(n) : $1+2+3+4+........+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

### 2- Définition d'une suite :

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
On la note :**U** ou **($U_n$)** ou $(U_n)_{n\in IN}$.

**U** : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

0 $\mapsto$ u (0) = $u_0$ est le premier terme de la suite u.

1 $\mapsto$ u (1) = $u_1$ est le deuxième terme de la suite u.

. .

. .

n $\mapsto$ u (n) = $u_n$ est le terme général de la suite u.

**Exemples :**

Soient les suites ($U_n$) ; ($V_n$) ; ($W_n$) définies par leur terme général :
($U_n$) est telle que $U_n = 2n + 5$ ; ($V_n$) est telle que $V_n = 2^n$ ;
($W_n$) est telle que $W_n = \dfrac{1}{n^2}$.

### 3 – Mode de définition d'une suite :

Une suite numérique peut se définir de différentes façons.

**a) Suites définies par $U_n$ = f (n) :**

Ce sont des suites définies par la donnée explicite du terme général $U_n$ en fonction de n.

**Exemple :** Soit la suite ($U_n$) définie par $U_n = 2^n$. Calculer les 4 premiers termes.

**b) Suites récurrentes :**

Ce sont des suites définies par la donnée de son 1er terme et d'une relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ liant deux termes consécutifs de la suite : ( $f$ est une fonction).

**Exemple :** Soit la suite $(U_n)$ définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$.

Calculer $U_1$ ;$U_2$ ; $U_3$ ; $U_4$ et représenter graphiquement les termes de cette suite.

Réponse

$n = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 3 = 4$ ; $n = 1 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 3 = 5$ ; $U_3 = \frac{11}{2}$ ; $U_4 = \frac{23}{4}$.

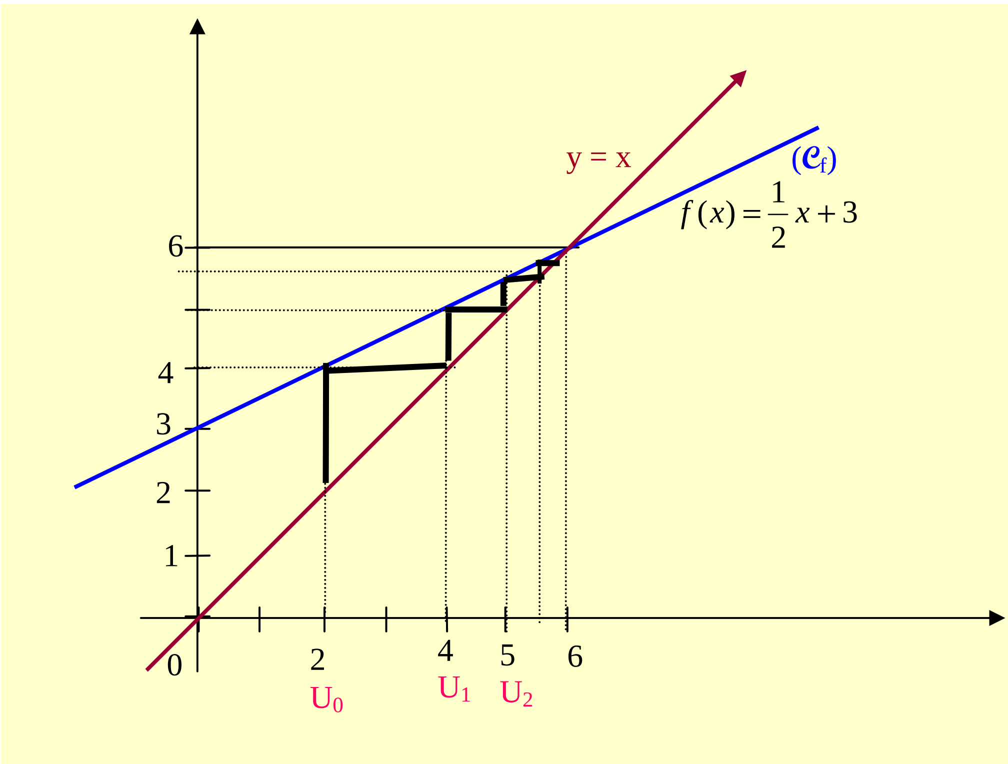
Représentons les termes de cette suite graphiquement.

Soit $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ la fonction associée à la suite $(U_n)$.

$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{2}U_n + 3 \quad et \quad U_0 = 2$ ;

$U_1 = f(U_0) = 4$ ; $U_2 = f(U_1) = 5$ ; $U_3 = f(U_2) = \frac{11}{2}$ ; $U_4 = f(U_3) = \frac{23}{4}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on trace la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f et la droite d'équation : y = x.



## 4 – Sens de variation d'une suite :

### a) Définitions :

– On dit que la suite $(U_n)$ est croissante sur ℕ, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \text{ou} \quad U_n \leq U_{n+1}$$

– On dit que la suite $(U_n)$ est décroissante sur ℕ, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad \text{ou} \quad U_{n+1} \leq U_n$$

– On dit que la suite $(U_n)$ est constante sur ℕ, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+1} = U_n$$

– On dit que la suite $(U_n)$ est stationnaire à partir du rang $n_0$, si pour tout entier naturel n **dès que $n \geq n_0$ alors $U_n = U_{n_0}$**.

– On dit que la suite $(U_n)$ est à termes positifs, si pour tout entier naturel n on a :

$$U_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

**Remarques :** si $U_n > 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ **.**

$$\left[ (U_n) \quad est \quad croissante \right] \Leftrightarrow \left[ \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1 \right].$$

$$\left[ (U_n) \ est \ \ décroissante \right] \Leftrightarrow \left[ \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \right];$$

### b) Théorème :

Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_n = f(n)$, avec $f$ définie sur $[0; +\infty[$
Si $f$ est strictement croissante, alors $(u_n)$ est strictement croissante.
Si $f$ est strictement décroissante, alors $(u_n)$ est strictement décroissante.

**Démonstration :**

a) cas où $f$ est strictement croissante :
Pour tout entier naturel n, la fonction $f$ est strictement croissante, donc $f(n + 1) > f(n)$. D'où : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
La suite $(u_n$ est donc strictement croissante.

b) cas où $f$ est strictement décroissante :
Pour tout entier naturel n, la fonction $f$ est strictement décroissante, donc $f(n + 1) < f(n)$. D'où : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
La suite $(u_n$ est donc strictement décroissante.

<u>NB</u> : *Ce théorème ne s'applique pas si la suite ($u_n$) est définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$). Les variations de la fonction f et de la suite ($u_n$) ne sont pas toujours les mêmes.*

**Exemple :** Soit ($U_n$) définie par : $U_n = \sqrt{2+n}$ sur ]0 ;+ ∞ [.

Déterminer le sens de variation de la suite ($U_n$) sur ]0 ;+ ∞ [.

**-- 0 --**

Soit la fonction numérique $f$ associée à la suite ($U_n$) définie par : $f(x) = \sqrt{2+x}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$ , ∀ x > 0. Donc $f$ est strictement croissante sur ]0 ;+∞[.

Par conséquent la suite ($U_n$) est strictement croissante sur ]0 ;+∞[.

**5 – Suites bornées :**

**–** On dit qu'une suite numérique ($U_n$) est majorée s'il existe un réel **M** tel que **.** $\forall n \in \mathbb{N},\quad U_n \le M$ . **M** est un majorant de la suite ($U_n$).

**–** On dit qu'une suite numérique ($U_n$) est minorée s'il existe un réel **m** tel que **.** $\forall n \in \mathbb{N},\ m \le U_n$ **.** **m** est un minorant de la suite ($U_n$).

**–** Une suite numérique ($U_n$) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée C'est à dire : **.** $\forall n \in \mathbb{N},\ m \le U_n \le M$ .

**Exemple :** Soit U la suite définie par sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1 \end{cases}$.

Montrer que U est bornée par –2 et 1.

**-- 0 --**

$$U_0 = 1 \quad et \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1 \ ;$$

(U est bornée par –2 et 1) ⇔ $(\forall n \in IN,\ -2 \le U_n \le 1)$.

Démontrons ceci par récurrence.

n = 0 ; $U_0$ = 1 on a : $-2 \le U_0 \le 1$ vraie.

Soit p ∈ ℕ; supposons que : $-2 \le U_p \le 1$ ; montrons que $-2 \le U_{p+1} \le 1$ avec $U_{p+1} = \frac{1}{2}U_p - 1$ ; $-2 \le U_p \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{1}{2}U_p \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \le \frac{1}{2}U_p - 1 \le -\frac{1}{2} \le 1$. vraie à l'ordre (p+1). D'après le principe du raisonnement par récurrence $(\forall n \in IN,\ -2 \le U_n \le 1)$ ⇔ D'où la suite U est bornée par –2 et 1.

## II– Suites Convergentes – Suites divergentes:

**($U_n$) converge** $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \quad (l \in IR)$

(Si $\ell$ **=** $+\infty$ ou $-\infty$ ou n'existe pas) **Alors ($U_n$) diverge.**

**a) – Suites définies par $U_n = f(n)$ :**

Dans ce cas on calcule directement la limite en $+\infty$ .

**b) – Suites définies par $U_{n+1} = f(U_n)$ :**

Si ($U_n$) a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ , alors $\ell$ est une solution de l'équation : $f(x) = x$.

(la solution de l'équation $f(x) = x$ est la limite éventuelle de **($U_n$)**)

**c) – Etude de quelques suites récurrentes :**

- **$U_{n+1} = a\,U_n + b$ ; ( $a \neq 0$ ; $b \neq 0$) :** $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = ax + b$ .

  Soit **α l**a solution de l'équation $f(x) = x$. On pose $V_n = U_n - \alpha$. On étudie la convergence de ($V_n$) puis on déduit celle de ($U_n$).

- **Exemple :** Soit $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$

  - Déterminer la limite éventuelle α de cette suite ($U_n$) ;
  - On pose $V_n = U_n - \alpha$. Etudier la convergence de ($U_n$).

- **Suites homographiques** $U_{n+1}$ **=** $\dfrac{aU_n + b}{cU_n + d}$ ( $c \neq 0$) **:**

  $U_{n+1} = f(U_n)$ **.** On résout $f(x) = x$. Soient α et β les solutions de l'équation $f(x) = x$. Soient A ( α ; 0) ; B ( β ; 0 ) ; $M_n$ ( $U_n$ ; 0).

  On pose $V_n = \dfrac{\overline{BM_n}}{\overline{AM_n}} \Leftrightarrow V_n = \dfrac{U_n - \beta}{U_n - \alpha}$**.**

  On étudie la convergence de ($V_n$) puis celle de ($U_n$).

## III – Propriétés des limites:

**a) Théorème 1 : (admis)**

Si ($U_n$) et ($V_n$) sont deux suites convergentes respectivement vers $\ell$ et $\ell'$. Alors on a :

. $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \ell + \ell'$ avec $\ell' \neq 0$ .

**b) Théorème 2 : (des gendarmes)**

Soient ($U_n$) ; ($V_n$) et ($W_n$) trois suites telles que ($U_n$) et ($V_n$) convergent vers $\ell$ et $U_n \leq W_n \leq V_n$, alors la suite ($W_n$) converge vers $\ell$.

c) **Théorème 3 : (admis)**

- Toute suite croissante et majorée est convergente ;
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

## IV – Suites Arithmétiques:

**1- Définition :** On appelle suite arithmétique toute suite $(U_n)$ définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme : $\mathbf{U_{n+1} = U_n + r}$ ; où **r** est un réel appelé la raison de la suite $(U_n)$.

**Exemples :** a) Soit $(U_n)$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$

Calculer les cinq premiers termes de la suite $(U_n)$.
b) Déterminer la suite de raison r = –3 dont le terme d'indice 4 égale à 30.
**Remarque :** une suite arithmétique $(U_n)$ est croissante si r est positive et décroissante si r est négative.

**2- Expression du terme général $U_n$ :**
Soit une suite arithmétique $(U_n)$ de 1er terme $U_1$ et de raison r.

$$U_1$$
$$U_2 = U_1 + r$$
$$U_3 = U_2 + r = U_1 + 2r$$
$$U_4 = U_3 + r = U_1 + 3r$$
$$U_5 = U_4 + r = U_1 + 4r$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$\forall\ p \in \mathbb{N},\ p < n$ on a : . $\mathbf{U_n = U_p + (n-p)\,r \iff U_n - U_p = (n-p)\,r}$ .

- Si le 1er terme est $U_0$ alors $U_n = U_0 + nr$ . (p=0)

- Si le 1er terme est $U_1$ alors $U_n = U_1 + (n-1)\,r$ . (p=1)

**Exemples :**

a) Trouver le 50è terme de la suite arithmétique : 12 ; 16 ; 20 ; …

b) Trouver le nième terme de la suite : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ……… ; n.

**3 – Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :**
Nous avons démontré par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit $(U_n)$ une suite arithmétique de 1[er] terme $U_0$ et de raison r. Posons :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n .$$

$$S_n = U_0 + (U_0+r) + (U_0+2r) + (U_0+3r) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (U_0+nr) \quad \Leftrightarrow$$

$$S_n = \underbrace{U_0 + U_0 + \ldots\ldots\ldots + U_0}_{U(n+1)\ fois} + (1+2+3+\ldots.+n)\,r \quad \Leftrightarrow$$

$$S_n = (n+1)\, U_0 + \frac{n(n+1)}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$. \quad \mathbf{S_n = \frac{(n+1)}{2}\,[\,2U_0 + nr\,]} \quad \textbf{ou} \quad \mathbf{S_n = \frac{(n+1)}{2}\,[\,U_0 + U_n\,]} \quad .$$

(*Somme des n+1 premiers termes*)

– Si le 1[er] terme est $U_1$ alors on a :

$$. \quad \mathbf{S_n = \frac{n}{2}\,[\,2U_1 + (n-1)\,r\,]} \quad \textbf{ou} \quad \mathbf{S_n = \frac{n}{2}\,[\,U_1 + U_n\,]} \quad .$$

(*Somme des n premiers termes*)

**Exemple :** Calculer la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique : 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ................

## V – Suites géométriques:

**1- Définition :** On appelle suite géométrique toute suite $(U_n)$ définie par son premier terme et une relation de récurrence de la forme: $\mathbf{U_{n+1} = q \times U_n}$, où **q** est un réel appelé la raison de la suite $(U_n)$.

**2 – Expression du terme général $U_n$ :**

Soit $(U_n)$ une suite géométrique de 1[er] terme $U_1$ et de raison q.

$$U_1 ; \quad q$$
$$U_2 = q \times U_1$$
$$U_3 = q \times U_2 = q^2\, U_1$$
$$U_4 = q \times U_3 = q^3\, U_1$$

.

.

$\forall$ p ∊ ℕ, p < n on a : $. \quad \mathbf{U_n = U_p \times q^{\,n-p}}$ .

- Si le 1er terme est $U_0$ alors $U_n = U_0 \times q^{\,n}$ (p=0) .
- Si le 1[er] terme est $U_1$ alors $U_n = U_1 \times q^{\,(n-1)}$ (p=1)

**Exemple :**

Déterminer le sixième terme de la progression géométrique : 2 ; 6 ; 18 ;…….

## 3 – Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit $(U_n)$ une suite géométrique de 1er terme $U_0$ et de raison q. Posons :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots + U_n .$$

$$-$$

$$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + \ldots\ldots\ldots + qU_n .$$

---

$$(1-q)\, S_n = U_0 - qU_0 + U_1 - qU_1 + \ldots\ldots + U_n - qU_n. \Leftrightarrow$$

$$(1-q)\, S_n = U_o - qU_n \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-q)\, S_n = U_o - qU_0 \times q^{\,n} \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-q)\, S_n = U_o\,(1 - q^{\,n+1}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{S_n = U_0 \times \frac{1-q^{\,n+1}}{1-q} \text{ avec } q \neq 1}$$

– Si le 1er terme est $U_1$ alors :

$$\boxed{S_n = U_1 \times \frac{1-q^{\,n}}{1-q} \text{ avec } q \neq 1}$$

– Si q = 1 alors on a :

$$\boxed{S_n = n\, U_1}$$

## 4 – Limites d'une suite géométrique :

Soit une suite géométrique de raison q et de terme général $U_n$.

- Si $|q| < 1$ alors $(U_n)$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ ;
- Si $|q| > 1$ alors $(U_n)$ diverge.

## 5 – Limites de la somme des termes d'une suite géométrique :

- Si q = 1 alors $S_n = n\, u_1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_1 = +\infty$ ;
- Si $q > 1$ alors $S_n = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ ;
- Si $q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{U_1}{1-q}$.

## 6 – Progressions Arithmétiques et Géométriques :

Soit la progression de trois termes x ; y ; z.

. (x ; y ; z sont en progression arithmétique) $\Leftrightarrow$ ( $x + z = 2y$ ) .

. (x ; y ; z sont en progression géométrique) $\Leftrightarrow$ ( $x \times z = y^2$ ) .

## VI – Tableau de Formules des suites arithmétiques et géométriques:

| Nature de la suite | Si le 1er terme est | Terme Général $U_n$ | Somme des termes |
|---|---|---|---|
| $(U_n)$ est une suite Arithmétique de raison r | $U_p$ <br> $U_0$ (p=0) | $U_n = U_p + (n-p)r$ <br> $U_n = U_0 + nr$ | $S_n = \frac{(n+1)}{2}[2U_0 + nr]$ <br> ou <br> $S_n = \frac{(n+1)}{2}[U_0 + U_n]$ |
| | $U_1$ (p=1) | $U_n = U_1 + (n-1)r$ | $S_n = \frac{n}{2}[2U_1 + (n-1)r]$ <br> ou <br> $S_n = \frac{n}{2}[U_1 + U_n]$ |
| $(U_n)$ est une suite Géométrique de raison q | $U_p$ <br> $U_0$ (p=0) | $U_n = U_p \times q^{n-p}$ <br> $U_n = U_0 \times q^n$ | $S_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ <br> avec $q \neq 1$ |
| | $U_1$ (p=1) | $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ | $S_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ <br> avec $q \neq 1$ |
| | $U_1$ | Si q = 1 alors | $S_n = n\,U_1$. |

**<u>Exercice</u> :** On considère la suite $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4 \end{cases}$

a-/ Trouver la limite éventuelle α de la suite $(U_n)$.

b-/ On pose $V_n = U_n - 8$. Etudier la convergence de $(U_n)$.