EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Exercice 1

I – résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1°) $e^{5x+1} = e^{3x+2}$; 2°) $e^{x^2+2} = e^{3x}$; 3°) $e^{x^2} = 4$; 4°) $e^{x+3} \times e^{x-2} = e^3$

5°) $\dfrac{e^x}{e^3} = e^5$; 6°) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$; 7°) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$;

8°) $e^x - 10e^{-x} = 3$; 9°) $e^{2(x+1)} - 8e^{x+2} - 9e^2 = 0$; 10°) $3^{2x+2} + 26.3^x - 3 = 0$;

11°) $e^{3x+2} + \dfrac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$; 12°) $\dfrac{e^{2x} - 6}{2 - 2e^x} = 1$; 13°) $-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0$;

14°) $3e^{3x} - 4e^{2x} - 13e^x + 14 = 0$; 15°) $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0$;

16°) $e^{2x} - e^x - 12 > 0$; 17°) $3e^{2x} + e^x - 10 \geq 0$; 18°) $2e^{2x} - 11e^x + 15 > 0$.

19°) $2e^{3x-3} + 3e^{2x-2} - 8e^{x-1} + 3 = 0$.

II- 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 3x - 10 = 0$.

En déduire la résolution des équations suivantes

a) $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$

b) $4^x - 3 \times 2^x - 10 = 0$

c) $(\log x)^2 - 3(\log x) - 10 = 0$

2°) Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

a) Calculer P(1). Écrire P(x) sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

b) Résoudre P(x) = 0. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations

- $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 4(\ln x) + 4 = 0$
- $e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$.

3°) Résoudre dans les équations : $3^{2x} = 2^{3x}$; $6^{2\sqrt{x}} + 5 \times 6^{1+\sqrt{x}} - 6^3 = 0$

III – Résoudre dans les systèmes suivants :

1°) $\begin{cases} 3e^x - 4e^y = -6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$ 3°) $\begin{cases} \ln(y+1) - \ln(x+4) = -\ln 8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$

4°) $\begin{cases} e^{2x} - 4e^x + 3 \succ 0 \\ 2e^{2x} - 11e^x + 5 \leq 0 \end{cases}$ 5°) $\begin{cases} \ln(3x+4y) - \ln 7 = \ln(2-5x) + \ln 5 \\ e^{x-2} \times e^{y+3} = 1 \end{cases}$ 6°) $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6 \\ e^x = \dfrac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$

7°) $\begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$ 8°) $\begin{cases} \ln x - 2\ln y = \ln 2 \\ \dfrac{e^x}{e^{2-y}} = \left(\dfrac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$ 9°) $\begin{cases} 4^x \times \left(\sqrt{2}\right)^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \times 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$

IV – Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions, puis les limites aux bornes de l'ensemble de définition :

1°) $f(x)=\frac{e^x+2}{e^x-2}$; 2°) $f(x)=\frac{5}{e^x-1}$; 3°) $f(x)=\frac{3x}{e^x+1}$; 4°) $f(x)=\ln(e^x-2)$

5°) $f(x)=1+xe^{\frac{1}{x}}$; 6°) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$; 7°) $f(x)=\ln\left(e^{x+1}+2\right)$; 8°) $f(x)=\sqrt{e^x-3}$

9°) $f(x)=x+e^{\ln\left(\frac{3}{x^2-4}\right)}$;10°) $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x+1}$;11°) $f(x)=x+4-\frac{4}{e^x+1}$;12°) $f(x)=e^x(e^x-2)$

Exercice 2

A] Soit h la fonction numérique définie par : $h(x)=(x-1)\ e^{-x}+2$

1) Etudier la fonction h ;
2) Démontrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α et que :

$$-1 \le \alpha \le 0.$$

3) Donner le signe de h(x) dans son domaine de définition.
4) A l'aide de la calculatrice donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} (On explicitera la méthode utilisée).

B] Soit la fonction f définie par ; $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ et soit ($\mathcal{C}$) sa courbe dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Etudier les variations de f ;
2. Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet une droite (D) asymptote oblique en +∞ que l'on précisera.
3. Etudier la position relative de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D) ;
4. Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse x = 0.
5. Déterminer sur la figure le domaine puis calculer en cm^2 l'aire de la région du plan limitée par ($\mathcal{C}$) , (D) et les droites d'équations x = 0 et x = 2.

EXERCICE 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{x}\ e^{\frac{1}{x}} & pour \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 & \end{cases}$$

1°) Donner l'ensemble de définition Df de f et étudier les limites aux bornes de Df .

2°) Etudier le problème de la continuité de f au point 0.

3°) Déterminer les variations de f et tracer sa courbe.

4°) Calculer la dérivée de la fonction F définie par : $F(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

5°) Déterminer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de f et les droites d'équations respectives : $y = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^x(e^x - 2)$ et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormée d'unité 1cm.

1. Etudier les variations de f
2. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point x = ln2.
3. Tracer (T) et (C_f) dans le même repère ;
4. Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln2 ;
5. Déterminer graphiquement en fonction du réel m le nombre de solutions de l'équation $e^{2x} - 2e^x - m = 0$

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2cm.

A] Soit g la fonction définie par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$;
2. Etudier le sens de variation de g. Calculer g(0) puis déduire du tableau de variation de g le signe de g(x) suivant les valeurs de x.
3. Déterminer les réels a ; b ; et c pour que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de la fonction qui à x $\mapsto$ – x e ^{2x}.
4. En déduire la primitive de g qui prend la valeur 3 pour x = 0.

B] Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$. On appelle ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. Etudier la fonction f
2. Montrer que la droite (D) d'équation : y = x + 3 est asymptote à ($\mathcal{C}_f$).
3. Etudier la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (D) ;
4. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions α et β (α < β).
5. Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) et la droite (D) ;
6. Calculer l'intégrale : $I = \int_{-1}^{0} [f(x) - y]\,dx$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique : 2cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1} = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$;

b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Montrer que les droites (D_1) : y = x + 1 et (D_2) : y = x – 1 sont asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

d) Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D_1) et (D_2).

3. Montrer que la fonction f est impaire. On limitera l'étude de f à l'intervalle $[0;+\infty[$

4. Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty [$.

5. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 et les asymptotes (D_1) et (D_2).

6. Montrer que l'équation f(x) = 1 admet une solution unique x_0.

7. Déterminer en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ la droite (D_2) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2.

(On hachurera le domaine $\mathcal{D}$ sur la figure).

Exercice 7:

Soit la famille de fonctions f_m définies par $f_m(x) = (x+1)e^{mx}$ et soit (C_m) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. Montrer que toutes les courbes (C_m) de f_m passent par deux points fixes A et B dont précisera les coordonnées.

2. Etudier les variations des fonctions f_1 et f_{-1}.

3. Donner les équations des tangentes aux courbes (C_1) et (C_{-1}) aux points A et B.

4. Tracer les courbes (C_1) et (C_{-1}).

5. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_1) et (C_{-1}) les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 8

1°) On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{x}$ et on appelle ($\mathbf{C}_f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

a) Etudier les variations de f. préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

c) Tracer la courbe ($\mathbf{C}_f$) .

d) Soit α un réel strictement négatif. On note A(α) l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathbf{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = α et x = 0. Calculer A(α) en fonction de α.

Déterminer la limite de A(α) lorsque α tend vers $-\infty$.

2°) Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $g(x) = \ln\left(\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right|\right)$. On note (**Γ**) la courbe représentative de g dans le repère précédent.

a) Préciser les limites de g en $-\infty$; en $+\infty$ et en 0.

b) Calculer g'(x) et déterminer le signe de g'(x) en utilisant les signes de f '(x) et f(x). Dresser le tableau des variations de g.

c) Démontrer que pour tout réel x strictement positif $g(x) - x = \ln(1 - e^{-\frac{x}{2}})$.

Montrer que la droite ($\mathcal{D}_1$) d'équation y = x est asymptote à la courbe (Γ).

Préciser la position de (Γ) par rapport à ($\mathcal{D}_1$) pour tout réel strictement positif.

d) Démontrer que pour tout réel x strictement négatif $g(x) - \frac{x}{2} = \ln(1 - e^{\frac{x}{2}})$. Montrer que la droite ($\mathcal{D}_2$) d'équation y = $\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (Γ). Préciser la position de (Γ) par rapport à ($\mathcal{D}_2$) pour tout réel strictement négatif.

e) Construire (Γ) ; ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) dans le repère (O ; i ; j) .

NB : On utilisera un graphique différent de celui de la partie 1°).

Exercice 09

On considère, pour n entier naturel non nul, les fonctions f_n définies sur [0 ;+∞[par :

$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{-1}{nx}},\ si\ x \succ 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1°) Etude des variations de f_n pour x ∈[0 ;+∞[.

a) Prouver que f_n est continue sur [0 ;+∞[.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0.

c) Calculer f_n'(x) pour x >0 et justifier que f_n est strictement croissante sur [0 ;+∞[.

2°) Etude au voisinage de +∞.

a) Etudier la limite de f_n en +∞.

b) Donner le tableau des variations de la fonction g définie sur [0 ;+∞[par

$g(x) = e^{-u} - (1-u)$.

En déduire que pour tout nombre réel u ≥ 0 : $0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$. **(1)**

3°) Soit t ≥ 0, en intégrant sur l'intervalle [0 ; t] l'encadrement **(1)**, en déduire que,

pour tout nombre réel t ≥0 on a : $0 \leq e^{-t} - (1-t) \leq \frac{t^2}{2}$. **(2)**

4°) Démontrer grâce à **(2)** que, pour tout réel x ≥ 0 ; on a

$$0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}. \ \textbf{(3)}$$

En déduire que la droite D_n d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe (C_n) de f_n.

5°) Préciser la position relative de (C_n) et (D_n).

6°) Tracé de courbes

a) Donner le tableau des variations de f_n.

b) Tracer la courbe (C_1) et son asymptote en précisant la tangente en O.

c) Démontrer que, pour tout n > 0, (C_1) est l'image de (C_2) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$. Construire (C_2) sur le même graphique que (C_1).

7°) Pour n entier naturel non nul, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

On se propose d'encadrer l'intégrale I_n sans chercher à la calculer.

a) Montrer que, pour tout x de [0 ;1] : $f_n(x) \leq x$.

En déduire que, pour tout entier n ≥1, $I_n \leq \frac{1}{2}$.

b) En utilisant la relation (3), établir que : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.

c) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers +∞.

Exercice 10

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction définie sur ℝ par : $f_n(x) = xe^x - nx$. On note ($\mathcal{C}_n$) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; i ; j).

A] Soit g_n la fonction définie sur ℝ par : $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1. Déterminer la dérivée de g_n. Faire le tableau des variations de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que g_n s'annule pour une valeur α_n, et que α_n est positif ou nul.
3. Montrer que : $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$ avec $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$.
4. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln x \leq x - 1$, **(1).**

   b) Déduire de **(1)** le signe de $g_n(\ln\sqrt{n})$;

   c) Justifier que : $\frac{1}{2}\ln(n) \leq \alpha_n$.

   Quelles sont les limites des suites de termes généraux α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$?

B] – 1. a) Déterminer la dérivée de f_n . En déduire les variations de f_n.

b) Déterminer les limites de aux bornes de f_n son ensemble de définition.

c) Montrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.

2. Montrer que ($\mathcal{C}_n$) admet une asymptote ($\mathcal{D}_n$) que l'on déterminera.

3. Déterminer les points d'intersection de ($\mathcal{C}_n$) avec l'axe des abscisses, et préciser la position de par rapport à cet axe.

4. Etudier les positions relatives de ($\mathcal{C}_n$) et ($\mathcal{C}_{n+1}$).

5. a) Montrer que : $0{,}35 \leq \alpha_2 \leq 0{,}40$. Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès de α_2. En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

b) Tracer ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$) sur le même graphique d'unité 10cm, en mettant en évidence les résultats précédents. Préciser les tangentes en O à ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$).

Exercice 11

Soit les fonctions f et g définies sur [0 ;+ ∞[par

$$f(t) = \frac{36}{8+e^{-t}} \quad et \quad g(t) = 2\ln(t+1)+2.$$

Soit (C_f) et (C_g) leurs courbes respectives dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1/- a) Etudier les variations de chacune des fonctions f et g.

b) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} f(t) \quad et \quad \lim_{t \to +\infty} g(t)$

c) Tracer les tangentes à ($\mathcal{C}_f$) et à ($\mathcal{C}_g$) aux points d'abscisse x = 0 puis les courbes ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$) dans le même repère.

2/- On suppose $h = g - f$

a) Calculer la dérivée h' de la fonction h

b) On admet que h'(x) $>$0 sur [0 ;+ ∞[. Montrer que h s'annule en une seule valeur α de [0 ; 5] et une seule. Montrer que α ϵ [2 ;3].

3/- a) vérifier que $f(t) = \frac{36e^t}{8e^t+1}$. Calculer l'intégrale $I = \int_0^5 f(t)dt$; en donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

b) Calculer $J = \int_0^5 g(t)dt$. (on utilisera la dérivée de la fonction k définie sur

[0 ;+ ∞[par *k(t) = (t+1)ln(t +1) – t)* ; en donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

4/- On estime que sur une période [t ; t+1[où 0 ≤ t ≤ 9. Un plan de restructuration industrielle entraîne des suppressions d'emplois données par $f(t)$(nombre d'emplois supprimés exprimé en milliers) pendant la même période ce plan crée de nouveaux emplois donnés par $g(t)$(nombre d'emplois crées exprimé en milliers). On suppose que ces deux phénomènes se réalisent

continûment au cours du temps. Le solde d'emploi à l'instant t est donc

$$h(t) = g(t) - f(t).$$

a) D'après le graphique de h, à partir de quelle année ce solde devient-il positif ?.
b) On admet que sur les cinq premières années le de restructuration induit une variation dans le nombre d'emploi assimilable à l'intégrale $L = \int_0^5 h(t)dt$.

Exprimer le bilan de restructuration sur 5 années.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par $f(x)=(-2x-4)e^{-\frac{x}{2}}+2-x$; et soit ($\mathcal{C}$f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Partie A :

Pour tout réel x, on considère la fonction g définie par : $g(x)=x-e^{\frac{x}{2}}$.

1°) Etudier les variations de la fonction g.

2°) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B :

1°) Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2-x)]$ puis interpréter.

3°) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=g(x)e^{-\frac{x}{2}}$.

4°) En déduire le sens de variation de f.

5°) Déterminer les coordonnées du point B intersection de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f et de son asymptote oblique ($\mathcal{D}$). En déduire la position de ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{D}$).

6°) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique ℓ dans $\mathbb{R}$ et justifier que $-2<\ell<-1$.

7°) Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$f) au point d'abscisse 0.

8°) Tracer ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}$f) dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

9°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}$f) , ($\mathcal{D}$) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = – 2 , x = 0

Exercice 13

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x)=x-e^{x}$ *et* $g(x)=(1-x)e^{x}$.

On désigne par ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$) les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1°) Etudier les variations des fonctions f et g.

2°) Montrer que la droite (D) d'équation y = x est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.

3°) Pour tout réel x on pose $h(x)=f(x)-g(x)$.

a) Montrer que pour tout réel x, $h'(x)=1-g(x)$;

b) En déduire le sens de variation de h ;

c) Dresser le tableau de variation de h , on calculera les limites de h.

4°) Démontrer que les courbes ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$) admettent un unique point d'intersection, dont, l'abscisse, notée α, appartient à [1; 2].

5°) Etudier la position relative de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à ($\mathcal{C}_g$).

6°) Tracer la droite ($\mathcal{D}$) et les courbes ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$).

7°) Calculer en cm² l'aire A du domaine plan limité par ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$), l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = α.

Exercice 14

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{2e^x-1}{e^x-1}$ et soit (Cf) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) d'unité graphique 1cm.

1°) Étudier les variations de la fonction f.

2°) Vérifier que le point I (0 ;$\frac{3}{2}$) est centre de symétrie pour la courbe (Cf).

3°) Déterminer les coordonnées des points de la cou rbe (Cf) en lesquels la tangente admet un coefficient directeur égal à (–6).

4°) Tracer la courbe (Cf) dans le plan muni du repè re orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

5°) Calculer en cm² l'aire du domaine formé par l'e nsemble des points dont les coordonnées x et y vérifient : $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le f(x) \end{cases}$

6°) La droite (D) d'équation y = x coupe (Cf) en de ux points. Soit M_0 leur point d'intersection dont l'abscisse x_0 est positive.

a) Montrer que x_0 est solution de l'équation : $xe^x - 2e^x - x + 1 = 0$.

b) Montrer que la fonction numérique h définie par $h(x) = xe^x - 2e^x - x + 1$ est continue et strictement monotone sur [2 ; +∞[.

En déduire que x_0 appartient à l'intervalle [2 ; 3] et calculer une valeur approchée de x_0 par défaut et par excès à 10^{-1} près.

Exercice 15

Soit g la fonction définie sur [1 ;+∞[par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1°) Etudier les variations de g sur K=[1 ;+ ∞[.(On ne demande pas de tracer sa courbe).

2°) Montrer que si x appartient à [1 ;+ ∞[alors g(x) appartient à K=[1 ;+∞[.

3°) Montrer que l'équation g(x) = x admet une solut ion unique $\alpha \in$ K=[1 ;+∞[.

4°) Montrer que pour tout x de K, on a : $|g'(x)| \le \frac{3}{e^2}$.

En déduire que pour tout x de K, on a :$|g(x)-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|x-\alpha|$.

5°) Soit (U_n) la suite d'élément de K définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour n$\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout entier n positif ou nul on a : $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n-\alpha|$.

b) En déduire que pour tout entier n positif ou nul on a : $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

Exercice 16

Les fonctions f_1 et f_2 sont définies sur ℝ par : $f_1(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $f_2(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Partie I :

1) déterminer les fonctions dérivées de f_1 et f_2.

2) Dresser le tableau de variation de f_1 puis celui de f_2.

3) Déterminer la position relative des courbes ($\mathcal{C}_1$) de f_1 et ($\mathcal{C}_2$) de f_2.

4) Déterminer les points d'intersection de chacune de ces courbes avec l'axe des ordonnées et une équation de la tangente à chacune des courbes en ces points.

4) Tracer les courbes ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$) dans un repère orthonormé (unité 2cm).

5) calculer en cm^2 l'aire A(λ) du domaine plan limité par les courbes ($\mathcal{C}_1$);

($\mathcal{C}_2$) et les droites d'équations : x = 0 et x = λ , ($\lambda > 0$). Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

Partie II :

On considère la fonction h définie par : $h(x)=\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

1) Montrer que h est continue sur ℝ, et que $\left(f_1(x)\right)^2-\left(f_2(x)\right)^2=1$, ∀x∈ℝ.

En déduire la fonction dérivée h' de h et dresser le tableau de variation de h

2) Préciser les asymptotes éventuelles de la courbe ($\mathcal{C}_h$) de h.

3) Déterminer la position relative de ($\mathcal{C}_h$) par rapport aux asymptotes

4) Déterminer le point de ($\mathcal{C}_h$) d'abscisse nulle et la tangente en ce point

5) Construire dans un repère orthonormé la courbe ($\mathcal{C}_h$) de h.

6) En posant u(x) = $e^x + e^{-x}$, montrer que h(x) peut s'écrire sous la forme

$h(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, $x\in\mathbb{R}$. Calculer alors $I=\int_0^{\ln 2} h(x)\,dx$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Soit U la fonction définie par $U(x)=\dfrac{e^x}{1-x}$. Démontrer que, pour tout nombre réel x non nul et différent de 1, $(f(x)-x)$ est le taux de variation de U entre 0 et $\dfrac{1}{x}$.

Déduisez-en la limite de $(f(x)-x)$ quand x tend vers +∞ ou – ∞. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) Soit g la fonction définie de la façon suivante : $\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=f(x), \quad si \quad x\neq 0 \end{cases}$

On désigne par (Cg) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Justifier que g est le prolongement de f par continuité à gauche en $x_0 = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.

4°) a) Démontrer que l'équation $f(x)=x+2$ a les même solutions que

l'équation : $e^{\frac{1}{x}}=(1-\dfrac{1}{x})(1+\dfrac{2}{x})$.

b) Résolvez l'équation : $e^x=(1-x)(1+2x)$ et déduisez-en les solutions de l'équation : $f(x)=x+2$ puis les positions relatives de (Cf) et de la droite D d'équation : $y=x+2$.

5°) Dessiner la courbe (Cf).

Exercice 18

Soit $C_m(x)$ la fonction coût marginal exprimé en *k* Euros est définie par : $C_m(x)=(1-x)e^{-x+2}+2$ pour une production x en tonnes.

1°) a) Étudier les variations de la fonction coût marginal

b) Pour quelle quantité x le coût marginal est-il minimum ?

c) Montrer que $\forall x \in [0\,;+\infty[$ $C_m(x)>0$. Que peut-on en déduire pour le coût total.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} C_m(x)$. Pour de grandes quantités que peut-on dire du coût marginal ?

2°) a) Le coût fixe étant 10*k* Euros ; montrer que le coût total $C_T(x)=xe^{-x+2}+2x+10$.

b) Le coût moyen étant définie par $C_M(x)=\dfrac{C_T(x)}{x}$; exprimer $C_M(x)$ en fonction de *x*.

c) Montrer que le coût moyen est décroissante sur]0 ;+ ∞[.

Exercice 19

A-/ *Étude d'une fonction auxiliaire.*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^{-x} - 1$.

1°) Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.
2°) Calculer g'(x) et dresser le tableau de variation de g.
3°) Calculer g(0). En déduire le signe de g(x).

B-/ *Étude de la fonction f.*

Soit la fonction numérique *f* définie par $f(x) = -x + 4 + xe^{-x}$. Soit ($\mathcal{C}_f$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.
1°) Déterminer l'ensemble de définition D*f* de *f* puis calculer les limites de *f*.
2°) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à ($\mathcal{C}_f$) en $+\infty$.Étudier la position relative de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (D).
3°) Vérifier que $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variation de *f*.
4°) a) A l'aide du tableau de variation de *f*, déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$.
b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions.
5°) Tracer soigneusement la droite (D) et la courbe ($\mathcal{C}_f$).

C-/ *Modélisation économique de la fonction f.*

La fonction *f* modélise la demande d'un produit, x la quantité demandée de 0 à 4 milliers de tonnes, $f(x)$ le prix en Euros de ce produit en Kg.
1°) justifier que pour x$\in$[0 ; 4] , $f(x)$ est positif.
2°) La fonction d'offre de ce même produit est définie sur [0 ;4] par $h(x) = 0{,}5x + 2$, où x est la quantité et h(x) le prix en Euros. Construire sa représentation graphique (Δ) dans le même repère que ($\mathcal{C}_f$).

3°) Lire graphiquement le prix d'équilibre du marché de la quantité échangée à ce prix.

4°) On suppose que la quantité produite au prix d'équilibre est x =1,55.

a) Quelle est la position de la courbe de l'offre par rapport à celle de la demande dans [0 ; 1,55]. Quelle conséquence économique peut-on déduire ?
b) Quelle est la position de la courbe de l'offre par rapport à celle de la demande dans [1,55 ; 4]. Quelle conséquence économique peut-on déduire ?

Exercice 20

Partie A

Pour tout entier naturel n strictement positif on donne f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur ℝ- {-1} par $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^n}$. On note ($\mathcal{C}_n$) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1°) Déterminer la fonction dérivée f_n' de f_n et donner l'expression de f_n' en fonction de f_n et f_{n+1}.

2°) Étudier les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$;-1 ; $+\infty$ (On distinguera le cas n pair et impair)

3°) Démontrer que toutes les courbes ($\mathcal{C}_n$) passent par un même point fixe.

4°) Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour toutes les courbes ($\mathcal{C}_n$) ? Tracer sur deux figures distinctes les courbes ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$).

Partie B

On donne $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$, n∈ℕ*.

1°) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

2°) Démontrer que pour tout n $\geq$ 2, $\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \dfrac{e}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3°) En utilisant la question A) 1°) trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

4°) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_{n+1} = 1$. En déduire que la suite ($n\times I_n$), n∈ℕ* converge et déterminer sa limite.

Partie C

Dans cette partie on donne n = 2

1°) Démontrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

2°) Étudier les variations de f_2' dans $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ et en déduire que pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ on a :

$-0{,}25 \leq f_2'(x) \leq 0$.

3°) Soit la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer en utilisant la question C) 2°) que pour tout entier n on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

b) En déduire que $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ pour n∈ℕ , et que $(U_n)_{n\in IN}$ converge vers α.

b) Déterminer n pour que U_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

NB : On donne $\sqrt{e} = 1{,}65$; $\ln 2 = 0{,}69$; $\ln 5 = 1{,}6$.

Exercice 21

Partie A : Étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$). L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.

1°) a) On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2°) On considère la fonction g définie sur]-1 ;+∞[par $g(t) = \dfrac{t}{1+t} - \ln(1+t)$.

a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

b) En déduire le signe de g(t) lorsque t > 0.

3°) a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^{x})$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4°) Tracer les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

Partie B : Comportement asymptotique d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1°) Étudier le sens de variation de la fonction F..

2°) a) Vérifier que pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+e^{t}} = 1 - \dfrac{e^{t}}{1+e^{t}}$ et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+e^{t}}$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de F(x).

c) Vérifier que F(x) peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$F(x) = x - \ln(1+e^{x}) - f(x) + 2\ln 2 \quad ; \quad F(x) = \ln\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right) - f(x) + 2\ln 2.$$

3°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

Partie C : Étude d'une suite.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k}\ln(1+e^{k})$.

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2°) a) Justifier que pour tout entier k, tel que 1≤ k ≤ n ; on a : $f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

b) Comparer U_n et F(n).

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?