République du Mali

Un Peuple – Un But – Une Foi

Recueils de Sujets et Corrigés de Mathématiques du Baccalauréat Malien Session d'Octobre 2020

AM²

Association MaliMath

Sixième Édition

Toute l'équipe de MaliMath vous serait très reconnaissant de bien vouloir communiquer sur le contenu de ce recueil, sa présentation ainsi que toutes autres suggestions

Exercice 1 : 6 points

On considère le polynôme définie par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calcule $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis factorise $P(z)$ en produit de deux polynômes du second degré.

2. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

3. Place, dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u} ; \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$.

4. On note E le symetriquede D par rapport à O.

a. Calcule $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$.

b. En déduis la nature du triangle BEA

Exercice 2 : 4points

Soit la fonctioon rationnnelle $f : \mapsto f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2-1)^2}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
2. Détermine les réels a, b tel que sur D_f, $f(x) = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{a}{(x-1)^2}$
3. En déduis deux primitives de f sur $]1 ; +\infty[$.

Problème : 10 points

Partie A

Soit la fonction g ddéfinie sur $]0 ; +\infty[$ par $g : x \mapsto g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1. Dresse le tableau de variation de g.
2. Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivantt les valeurs de x.

Partie B

Soit la fonction f défnfie sur $]0 ; +\infty[$ par $f : x \mapsto f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le rpère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1. Dresse le tableau de variations de f.
2. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.

3. a. Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.

   b. Étudie la position de (C) et (Δ).

4. Trace (C) et (Δ).

Exercice 1:

$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1. Calculons $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis factorisons $P(z)$ en produit de deux polynôme du second degré.

$$P(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63$$

$$= 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 = 0 \Rightarrow P(i\sqrt{3}) = 0$$

$$P(-i\sqrt{3}) = (-i\sqrt{3})^4 - 6(-i\sqrt{3})^3 + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63$$

$$= 9 - 18i\sqrt{3} - 72 + 18i\sqrt{3} + 63 = 0 \Rightarrow P(-\mathrm{i}\sqrt{3}) = 0$$

Méthode 1 : par division euclidienne.

On sait que $(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = z^2 + 3$ donc on a:

$$\begin{array}{l|l}
z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 & z^2 + 3 \\
\hline
-z^4 - 3z^2 & z^2 - 6z + 21 \\
\hline
0 - 6z^3 + 21z^2 - 18z & \\
6z^3 + 18z & \\
\hline
21z^2 + 63 & \\
-21z^2 - 63 & \\
\hline
0 + 0 &
\end{array}$$

Donc $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$

Méthode : par le tableau d'Hörner

Coefficient	1	-6	24	-18	63
$i\sqrt{3}$		$i\sqrt{3}$	$-6i\sqrt{3} - 3$	$21i\sqrt{3} + 18$	-63
	1	$-6 + i\sqrt{3}$	$21 - 6i\sqrt{3}$	$21i\sqrt{3}$	0
$-i\sqrt{3}$		$-i\sqrt{3}$	$6i\sqrt{3}$	$-21i\sqrt{3}$	
	1	-6	21	0	

$P(z)=\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-6z+21\right)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, $P(z)=0$

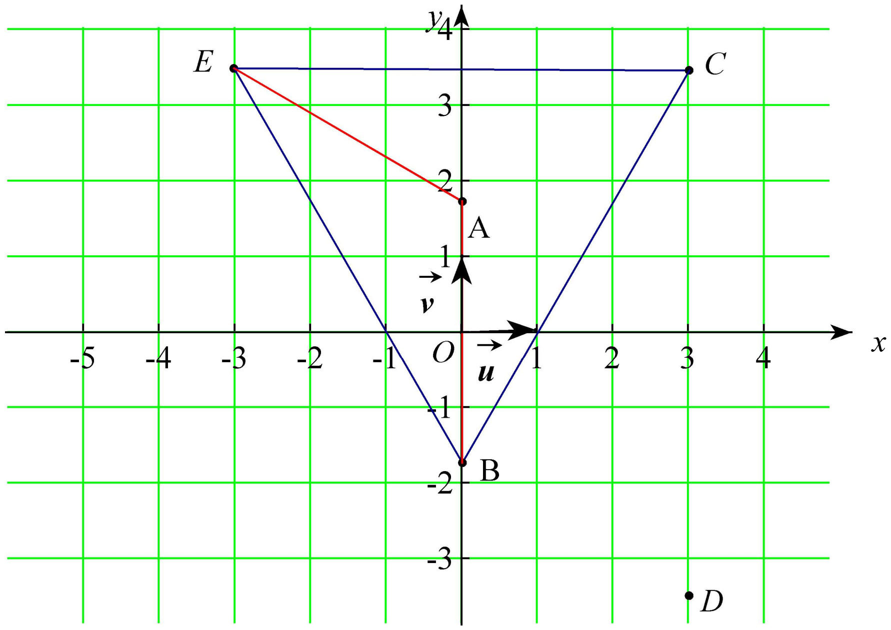
$P(z)=0 \iff \left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-6z+21\right)=0 \iff z_1=i\sqrt{3}$ ou $z_2=-i\sqrt{3}$ ou

$z^2-6z+21=0 \Longrightarrow \Delta=-48$

$z_3=\dfrac{6-4i\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3}$; $z_4=\dfrac{6+4i\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3}$

L'ensemble des solutions est : $S=\left\{i\sqrt{3}\,;-i\sqrt{3}\,;3-2i\sqrt{3}\,;3+2i\sqrt{3}\right\}$

3. Plaçons les points $A\left(i\sqrt{3}\right)$; $B\left(-i\sqrt{3}\right)$; $C\left(3+2i\sqrt{3}\right)$; $D\left(3-2i\sqrt{3}\right)$ dans le plan complexe $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$



4. E le symétrique de D par rapport à O

$z_E=-z_D=-3+2i\sqrt{3}$

a. Calculons $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{1+3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b. Déduction de la nature du triangle BEA

$\dfrac{z_A-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{6}=e^{-i\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow BEA$ est un triangle quelconque.

Par contre BEC

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow BEC \text{ est un triangle équilatéral}$$

Exercice 2 :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2 - 1)^2}$$

1. Déterminons l'esnsemble de f

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}, (x^2 - 1)^2 \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\} =]-\infty; -1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$$

2. Déterminons les réels a et b

$$f(x) = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{a}{(x-1)^2} = \frac{b(x-1)^2 + a(x+1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(b+a)x^2 + (2a-2b)x + b + a}{(x^2-1)^2}$$

Par identification des coefficients: $\begin{cases} b + a = 3 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases}$

$$2a = 2 \Longrightarrow a = 1$$
$$1 + b = 3 \Longrightarrow b = 2$$

3. Déduisons en deux primitives de f sur $]1;+\infty[$

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \Longrightarrow F(x) = -\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

Les fonctions $x \longmapsto -\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ et $x \longmapsto -\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + 1$ sont deux primitives de f

sur $]1;+\infty[$

Problème:

Partie A

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x \,;\, D_g =]0;+\infty[$

1. Dressons le tableau de variation de g

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty \,;\, \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right)$$

$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) < 0$ alors la fonction g est strictement décroissante.

x	0 $\qquad\qquad$ 1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$

2. Calculons $g(1)$ puis déduisons en le signe de $g(x)$
   $g(1) = -1 + 1 - \ln 1 = 0 \Rightarrow g(1) = 0$
   D'après le tableau de variation de g

   $\forall x \in]0\ ;1[$, $g(x) > 0$

   $\forall x \in]1; +\infty[$, $g(x) < 0$

   $g(1) = 0$

Partie B

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$$

1. Dressons le tableau de variation de f
   $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

   f est dérivable sur $]0,\ +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}(2x) - 2\ln x}{4x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{2x} \text{ donc } f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$ $2x^2 > 0$ alors $f'(x)$ a même signe que $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

2. Démontrons que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha<\beta$

f est continue et strictement croissante sur $]0\,;1[$ donc elle réalise une bijection de $]0\,;1[$ vers

$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, de plus $0\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ alors $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0\,;1[$

f est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de

$]1;+\infty[$ vers $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, de plus $0\in\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ alors $f(x)=0$ admet une unique solution $\beta\in$

$]1;+\infty[$

3. a. Montrons que la droite (Δ) : $y=-\frac{1}{2}x+1$ est asymptote à la courbe (C)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x}=0$ alors (Δ) est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$

b. Position de (C) et (Δ)

$f(x)-y=\frac{\ln x}{2x}$; $f(x)-y$ a même signe que $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	

Pour $x\in]0\,;1[$ $f(x)-y<0$ alors (C) est en dessous de (Δ)

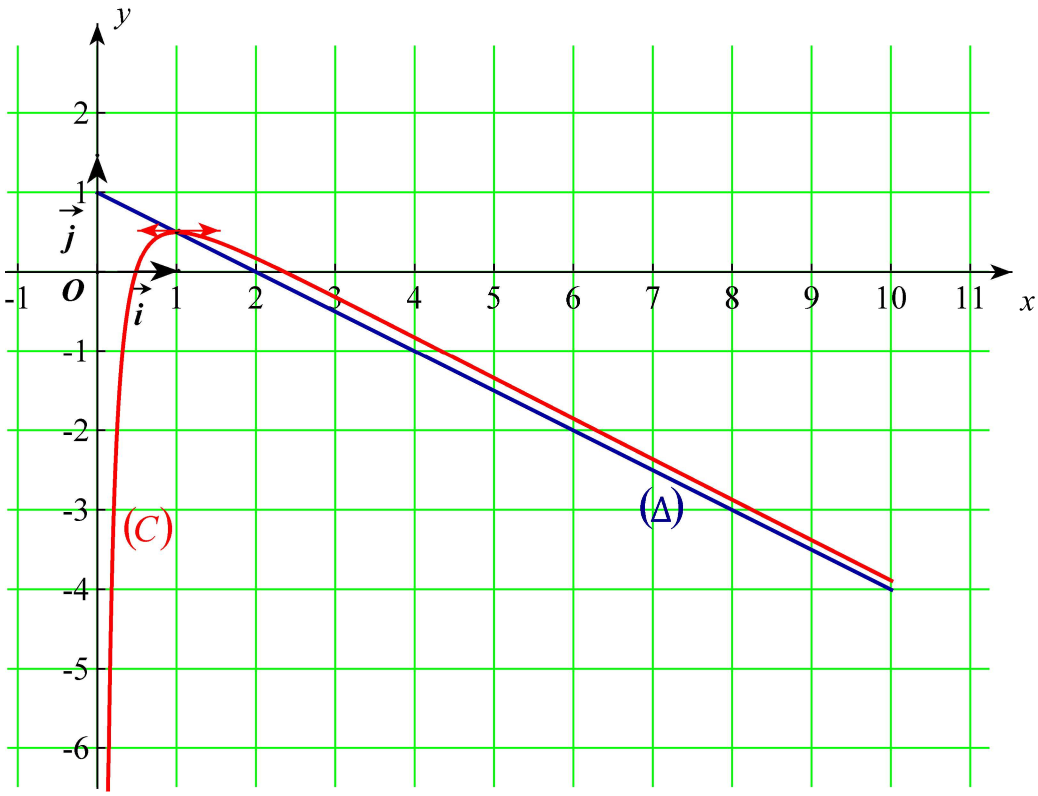
Pour $x\in]1;+\infty[$ $f(x)-y>0$ alors (C) est au dessus de (Δ)

Pour $x=1$,$f(x)-y=0$ alors (C) et (Δ) se coupent

4. Traçons (C) et (Δ) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\;;\vec{j})$

Table de valeur de (Δ)

x	0	1
y	1	$\frac{1}{2}$



« MaliMath » ou « M^2 » est une association née à partir d' un groupe de travail. Elle a été initiée par le département de mathématiques de l' ENSup de Bamako en collaboration avec l' IGEN et Thomas CASTANET.

« MaliMath » réuni des enseignants de mathématiques du fondamental à l' université, des formateurs, des conseillers pédagogiques, des inspecteurs. Depuis 2014, nous produisons des ressources numériques pour l' enseignement des mathématiques du primaire à l' université. Nous organisons aussi des formations à l' adresse des enseignants (ou tout autre acteur de l' éducation) autour de la maitrise et l' usage pédagogique de l' ordinateur et des logiciels pour l' enseignement des mathématiques.

Pour rejoindre le groupe et contribuer aux activités de « MaliMath », contacter