République du Mali

Un Peuple – Un But – Une Foi

Recueils de Sujets et Corrigés de Mathématiques du Baccalauréat Malien Session d'Octobre 2020

AM^2

Association MaliMath

Sixième Édition

Toute l'équipe de MaliMath vous serait très reconnaissant de bien vouloir communiquer sur le contenu de ce recueil, sa présentation ainsi que toutes autres suggestions

Exercice 1 :

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = 2i$, et pour tout nombre complexe z différent de z_B, On pose $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$.

1. Détermine, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :
   - **a.** Z soit un réel ;
   - **b.** Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul) ;
   - **c.** Z soit de module 1.
2. Calcule $|Z - 1| \times |z - z_A|$ et en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et rayon.

Exercice 2 :

1. Démontre que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. En déduis que $2^{3n+1} - 1$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2. Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   - **a.** Si $p = 3n$, quel est reste de la division de A_p par 7?
   - **b.** Démontre que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
   - **c.** Étudie le cas où $p = 3n + 2$.

Problème :

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Soit f la fonction définie $[0\ , +\infty]$ par $f(x)\ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On designe par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}\ , \vec{j})$, unité graphique : 2cm.

1. Montre que, pour tout réel x positif : $f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$.
2. **a.** Étudie la limite de f en $+\infty$.
   b. Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C), quand x tend vers

$+\infty$.

c. Étudie la position de (C) et(D).

3. Étudie les variations de f.

4. Trace (C) et(D).

5. Montre que, pour tout réel α, $\alpha > 0$: $\int_0^{\alpha} e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.

6. Établis que, pour tout réel u, $u \geq 0$; $\ln(1+u) \leq u$.

7. En déduis que, pour tout réel α, $\alpha > 0$: $\int_0^{\alpha} \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$.

8. Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par les droites d'équations $x=0$; $x=\alpha$, $y=2x$ et la courbe (C).
En déduis des quetions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α.

B. **1.** Étudie les variations de la fonction h définie dans l'intervalle $[2\,;4]$ par :

$h : x \longmapsto h(x) = 2 - x + \ln x$; en déduis que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique β

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

Montre que l'image de l'intervalle $[2\,;4]$ par la fonction $g : x \longmapsto 2 + \ln x$ est incluse

dans l'intervalle $[2\,;4]$.

3. Montre que en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n : $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \beta\right|$.

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier nature n :

$\left|u_n - \beta\right| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5. En déduis que (u_n) est convergente.

6. Détermine un entier N tel que $\left|u_N - \beta\right| \leq 10^{-4}$

Exercice 1 :

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$; $z_B = -2i$.

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$. On pose : $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$.

1. Déterminons dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a. Z soit un réel

***Méthode* 1 :**

Mettons Z sous la forme algébrique :

Soit $z = x + iy$ (où $x, y \in \mathbb{R}$) avec $z \neq -2i$

$$Z = \frac{(x+iy)-(2-i)}{(x+iy)+2i} = \frac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)}$$

$$= \frac{[(x-2)+i(y+1)][x-i(y+2)]}{x^2+(y+2)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)+(y+1)(y+2)+i[-(x-2)(y+2)+x(y+1)]}{x^2+(y+2)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x+y^2+3y+2+i(-xy-2x+2y+4+xy+x)}{x^2+(y+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2} + i\left(\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}\right)$$

$Z \in \mathbb{R} \implies -x + 2y + 4 = 0$, donc l'ensemble des points M cherchés est la droite d'équation : $x - 2y - 4 = 0$ privée du point $B(0\ ;\ -2)$.

***Méthode* 2 :**

$$Z \text{ soit réel} \implies Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \frac{z - z_A}{z - z_B} = \frac{\overline{z} - \overline{z_A}}{\overline{z} - \overline{z_B}}$$

$$\Leftrightarrow (z - z_A)\left(\overline{z} - \overline{z_B}\right) = (z - z_B)\left(\overline{z} - \overline{z_A}\right)$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} - z\overline{z_B} - z_A\overline{z} + z_A\overline{z_B} = z\overline{z} - z\overline{z_A} - z_B\overline{z} + \overline{z_A}z_B$$

$$\Leftrightarrow z\left(\overline{z_A} - \overline{z_B}\right) + (z_B - z_A)\overline{z} + z_A\overline{z_B} - \overline{z}_A z_B = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-i)z + (-2-i)\overline{z} + 2i(2-i) + 2i(2+i) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(z-\overline{z}\right)-i\left(z+\overline{z}\right)+2i(4)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\times 2iy-i\times 2x+8i=0$$

$$\Leftrightarrow\ -2x+4y+8=0 \Longrightarrow\ -x+2y+4=0.$$

L'ensemble des points M est la droite d'équation $-x+2y+4=0$ privée du point B.

Méthode 3 :[2]

Z est réel $\Longrightarrow \arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=k\pi$ *ou* $Z=0$ (avec $k\in\mathbb{Z}$) $\Longrightarrow$ les points A, B et M sont alignés d'où le point M est sur la droite (AB) donc l'ensemble des points M cherché est la droite (AB) privée du point B

b. $Z\in i\mathbb{R}$ (*éventuellement nul*)

***Méthode* 1** :

$Z\in i\mathbb{R} \Longrightarrow x^2+y^2-2x+3y+2=0$ avec $(x,y)\neq(0\ ,\ -2)$.

$$x^2+y^2-2x+3y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

L'ensemble des points M du plan est le *cercle* de centre $I\left(1\ ;\ \dfrac{-3}{2}\right)$ et *de rayon* $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $B(0\ ;\ -2)$

***Méthode* 2** : posons :$Z=-\overline{Z}$

$$Z=-\overline{Z} \Leftrightarrow \frac{z-z_A}{z-z_B}=-\frac{\overline{z}-\overline{z_A}}{\overline{z}-\overline{z_B}}$$

$$\Leftrightarrow (z-z_A)\left(\overline{z}-\overline{z_B}\right)=-(z-z_B)\left(\overline{z}-\overline{z_A}\right)$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z\overline{z_B}-z_A\overline{z}+z_A\overline{z_B}=-z\overline{z}+z\overline{z_A}+z_B\overline{z}-\overline{z_A}z_B$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}-z\left(\overline{z_A}+\overline{z_B}\right)-(z_B+z_A)\overline{z}+z_A\overline{z_B}-\overline{z_A}z_B=0$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}-(2+3i)z-(2-3i)\overline{z}+2i(2-i)-2i(2+i)=0$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}-2\left(z+\overline{z}\right)-3i\left(z-\overline{z}\right)+2i(-2i)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)-2\,(2x)-3i(2iy)+4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+3y+4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

L'ensemble des points M du plan est le *cercle* de centre $I\left(1\ ;\ \dfrac{-3}{2}\right)$ et *de rayon* $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $B(0\ ;\ -2)$

Méthode 3 : $($***méthode géométrique***$)$

Z est imaginaire pur $\Longrightarrow Z=0$ ou $arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{k\pi}{2}$ $(\text{avec } k\in\mathbb{Z}) \Longrightarrow \overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{BM}=0$

d'où l'ensemble des points M cherché du plan est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

c. $|Z|=1$

Méthode 1 :

$|Z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)}\right|=1$

$\Leftrightarrow |(x-2)+i(y+1)|=|x+i(y+2)|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=x^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow 4x+2y-1=0$

L'ensemble des points M du plan est la droite d'équation $4x+2y-1=0$.

Méthode 2 :

$|Z|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1 \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow AM=BM.$ Alors l'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AB]$

2. Calculons $|Z-1|\times|z-z_B|$

$|Z-1|\times|z-z_B|=\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}-1\right|\times|z-z_B|=|z_B-z_A|=|-2i-2+i|=\sqrt{5}$.

$|Z-1|\times|z-z_B|=\sqrt{5}$.

Déduisons, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

M parcourt le cercle de centre B et de rayon R $\Leftrightarrow |z-z_B|=R.$

D'après la question précédentes, on a : $|Z-1|\times|z-z_B|=\sqrt{5}\Longrightarrow|Z-1|=\frac{\sqrt{5}}{R}$, alors les points d'affixes Z appartiennent au cercle de centre $I(1\ ;0)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{R}$.

Exercice 2 :

1. Démontrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.

***Méthode* 1 :**

$2^{3n}=\left(2^3\right)^n=8^n$.

On sait que $8\equiv 1[7]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $8^n\equiv 1[7]\Longrightarrow 2^{3n}\equiv 1[7]\Longrightarrow 2^{3n}-1\equiv 0[7]$, alors $2^{3n}-1$ est un mulitiple de 7.

***Méthode* 2 :**

Posons P_n : la relation $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 c'est-à-dire $2^{3n}-1\equiv 0[7]$.

Pour $n=0$, $2^0-1=1-1=0\equiv 0[7]$ vraie.

Supposons que P_n est vraie jusqu'au rang n c'est-à-dire $2^{3n}-1\equiv 0[7]$ et montrons que P_{n+1} est vraie au rang $(n+1)$ c'est-à-dire $2^{3n+3}-1\equiv 0[7]$.

$2^{3n+3}-1=2^{3n}\times 8-1=2^{3n}(7+)-1=7\times 2^{3n}+\left(2^{3n}-1\right)=7\times 2^{3n}+7k\equiv 0[7]$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.

Déduisons que : $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7.

On sait que : $2^{3n}-1\equiv 0[7]\Longrightarrow 2\left(2^{3n}-1\right)\equiv 2\times 0[7]\Longrightarrow 2^{3n+1}-2\equiv 0[7]$

On sait que $2^{3n+1}-2\equiv 0[7]\Longrightarrow 2\left(2^{3n+1}-2\right)\equiv 2\times 0[7]\Longrightarrow 2^{3n+2}-4\equiv 0[7]$. D'où $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7.

***Méthode 3* :**

$2^{3n}-1=\left(2^3\right)^n-1=8^n-1=(8-1)\left(8^{n-1}+8^{n-2}+\cdots+8+\right)1=7\left(8^{n-1}+8^{n-2}+\cdots+8+\right)1$ est multiple de 7. Donc $2^{3n}-1\equiv[7]$.

2. Déterminons les restes de la division par 7 des puissances de 2.

Posons $2^n\equiv r[7]$ où r sont les restes de cette division.et $n\in\mathbb{N}$.

Pour $n=0$, $2^0=1\equiv 1[7]$

Pour $n=1$, $2^1=2\equiv 2[7]$

Pour $n=2$, $2^2=4\equiv 4[7]$

Pour $n=0$, $2^3=8\equiv 1[7]\Longrightarrow 3$ est la période, c'est-à-dire $2^{3k}\equiv 1[7]$

$2^{3k+1}\equiv 2[7]$ et $2^{3k+2}\equiv 4[7]$ avec $k\in\mathbb{N}$, donc $r\in\{1, 2, 4\}$ Pour tout $p\in\mathbb{N}$,

3. On considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a. Si $p = 3n$, déterminons le reste de la division de A_p par 7.

$A_{3n} = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n} \equiv (1 + 1 + 1)[7] \Longrightarrow A_{3n} \equiv 3[7]$. alors le reste est 3

b. Démontrons que, si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.

$A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3} = 2^{3n} \times 2^1 + 2^{3(2n)} \times 2^2 + 2^{3(3n)} \times 2^3 \equiv (2 + 4 + 1)\ [7]$ D'où

$A_{3n+1} \equiv 0[7]$., alors A_p est divisible par 7

c. Étudions le cas où $p = 3n + 2$.

$A_{3n+2} = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6} = 2^{3n} \times 2^2 + 2^{3(2n+1)} \times 2^1 + 2^{3(3n+2)} \equiv (4 + 2 + 1)[7]$.

D'où $A_{3n+2} \equiv 0[7]$., alors A_p est divisible par 7

Problème :

D'après l'énoncé, les parties A et B sont independantes.

A. f est la fonction définie :

$$f : [0\ ;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \ln\left(e^{2x} + 2e^{-x}\right)$$

$(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{J}\right)$, unité graphique 2cm.

1. Montrons que, pour tout réel x positif : $f(x) = 2x + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)$.

***Méthode* 1 :**

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} + 2e^{-x}\right) = \ln\left[e^{2x}\left(1 + \frac{2e^{-x}}{e^{2x}}\right)\right] = \ln e^{2x} + \ln\left(1 + 2e^{-x-2x}\right) = 2x + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right).$$

D'où $f(x) = 2x + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)$.

***Méthode* 2 :**

$$\begin{aligned} 2x + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right) &= 2x + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right) \\ &= 2x\ln e + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right) \\ &= \ln e^{2x} + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right) \\ &= \ln\left(e^{2x} + 2e^{-3x+2x}\right) \end{aligned}$$

$= \ln\left(e^{2x} + 2e^{-x}\right) = f(x).$

2. **a.** Étudions la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[2x + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)\right] = +\infty + \ln(1) = +\infty$

b. Montrons que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ quand x tend vers $+\infty$.

Méthode 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right) = \ln 1 = 0$ alors (D) : $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

Méthode 2

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, Faisons la recherche des branches paraboliques en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x + \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{\ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)}{x}\right) = 2.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right) = \ln(1) = 0$ Donc $y = 2x$ est est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$

c. Étudions la position de $(\mathscr{C})$ et (D) :

Etudions le signe de $f(x) - y$ suivant les valeurs de x

$f(x) - y = \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)$

Méthode 1 :

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^{-3x} > 0 \Longrightarrow 1 + 2e^{-3x} > 1 \Longrightarrow \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right) > 0$ alors $(\mathscr{C})$ est au dessus de (D)

Méthode 2 :

Étudions la fonction $x \longmapsto \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Posons $k(x) = \ln\left(1 + 2e^{-3x}\right)$

- Limite de k en $+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \ln 1 = 0$
- Calculons $k(0)$: $k(0) = \ln 3$
- Dérivée k' de k :

  $$k'(x) = -\frac{6e^{-3x}}{1 + 2e^{-3x}}.$$

  Signe de $k'(x)$

Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $k'(x) < 0$.

Tableau de variation de k

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$k'(x)$	$-$
$k(x)$	$\ln 3$ $\searrow$ 0

D'après le tableau de variation de k, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $k(x) > 0$ par suite

$f(x) - y > 0$ alors $(\mathscr{C})$ est au dessus de (D).

3. Étudions les variations de f.

- Dérivée de f : Pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$ f est dérivable,

$$f'(x) = 2 - \frac{6e^{-3x}}{1+2e^{-3x}} = \frac{2+4e^{-3x}-6e^{-3x}}{1+2e^{-3x}} = \frac{2(1-e^{-3x})}{1+2e^{-3x}} = \frac{2(e^{3x}-1)}{e^{3x}+2}.$$

Signe de $f'(x)$:

Pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

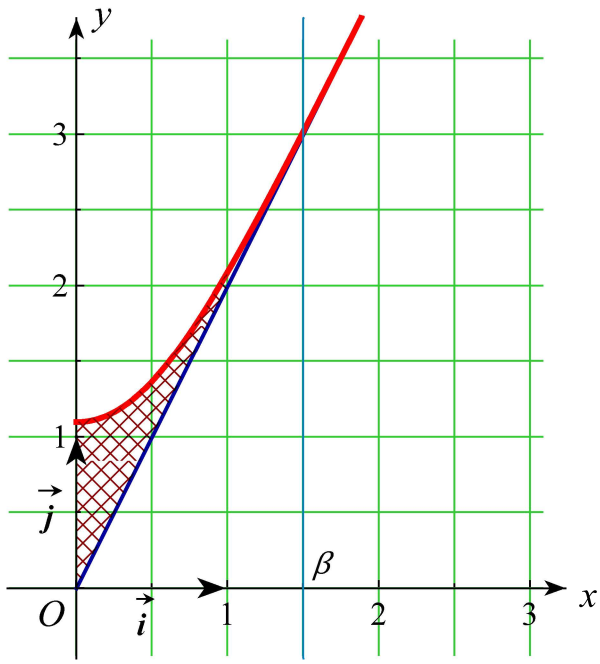
4. Traçons $(\mathscr{C})$ et (D).

- Calculons $f(0)$ puis dressons les tableau de variation de f.

$f(0) = \ln 3$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad$ $+$
$f(x)$	$\ln 3$ $\nearrow$ $+\infty$

- Trace de $(\mathscr{C})$ et (D)



5. Montrons que, pour tout réel α, $\alpha > 0$: $\int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$

Calculons : $\int_0^\alpha e^{-3x}dx$

$$\int_0^\alpha e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int_0^\alpha -3e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\right]_0^\alpha = -\frac{1}{3}\left(e^{-3\alpha} - 1\right).$$

On sait que, pour tout $\alpha > 0$:

$e^{-3\alpha} > 0 \implies -\frac{1}{3}e^{-3\alpha} < 0 \implies -\frac{1}{3}e^{-3\alpha} + \frac{1}{3} < \frac{1}{3} \implies \int_0^\alpha e^{-3x}dx < \frac{1}{3}$ par consequent

$\int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$

6. Établissons que, pour réel u, $u \geq 0$: $\ln(1+u) \leq u$.

$\ln(1+u) \leq u \Leftrightarrow \ln(1+u) - u \leq 0$

Posons $p(u) = \ln(1+u) - u$

Étudions la fonction p.

Dérivée :

$p'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = -\frac{u}{1+u} \leq 0$ pour tout $u \geq 0$, donc p est une fonction décroissante.

Calculons $p(0)$

$p(0) = 0$

Méthode 1

Tableau de variation de p :

u	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$p'(u)$	0 $\qquad$ $-$
$p(u)$	0 $\searrow$ $-\infty$

D'après le tableau de variation de p, pour tout $u \geq 0$, $p(u) \leq 0$ alors $\ln(1+u) \leq u$.

Méthode 2

Tableau de signe comparé

u	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$p'(u)$	0 $\qquad$ $-$
$p(u)$	0 $\searrow$

D'après le tableau de signe comparé de p, pour tout $u \geq 0$, $p(u) \leq 0$ alors $\ln(1+u) \leq u$

7. Déduisons que, pour tout réel α, $\alpha > 0$: $\int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$

D'après la question $6°$) on a : $\ln(1+u) \leq u$, pour tout $u \geq 0$

Posons $u = 2e^{-3x} > 0$ alors $\ln(1+2e^{-3x}) \leq 2e^{-3x} \Longrightarrow \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq 2\int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)$

d'où $\int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$.

$A(\alpha) = \left[\int_0^\alpha (f(x)-y)dx\right] \times 4\text{cm}^2$

8. Déduisons des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α.

D'après la question $7°$) . On a :

$\forall\ \alpha > 0\ \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 4\left(\int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx\right) \times \text{cm}^2 \leq \frac{2}{3} \times 4\text{cm}^2$ d'où

$A(\alpha) \leq \frac{8}{3}\text{cm}^2$.

B. 1. Étudions les variations de la fonction h définie dans l'intervalle $[2; 4]$ par :

$h(x) = 2 - x + \ln x$.

h est dérivable sur $[2; 4]$

Dérivée h' de h.

$h'(x) = -1 + \dfrac{1}{x}$

Signe de $h'(x)$

$x \in [2\ ;\ 4] \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 1 \leq \frac{1}{x} - 1 \leq \frac{1}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq \frac{1}{x} - 1 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < 0$$

On a pour tout $x \in [2\ ;\ 4]$ $\dfrac{1}{x} - 1 < 0$ donc $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $[2\ ;\ 4]$.

Calculons $h(2)$ et $h(4)$:

$h(2) = \ln 2$

$h(4) = -2 + 2\ln 2$

Tableau de variation de h sur $[2\ ;\ 4]$.

x	2	4
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$\ln 2$ ↘	$-2+2\ln 2$

Déduisons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β.

D'après le tableau de variation de h sur l'intervalle $[2\ ;\ 4]$, h est continue et strictement décroissante donc h réalise une bijection de $[2\ ;\ 4]$ sur $[-2 + 2\ln 2; \ln 2]$.

$0 \in [-2 + 2\ln 2\ ;\ \ln 2] \Rightarrow \exists! \beta \in [2\ ;\ 4]$, $h(\beta) = 0$. D'où l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β.

2. (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Montrons que l'image de l'intervalle $[2\,;4]$ par la fonction $g : x \longmapsto 2 + \ln x$ est incluse dans l'intervalle $[2\,;4]$.

Pour tout $x \in [2\,;4] \Leftrightarrow 2 \le x \le 4 \Longrightarrow \ln 2 \le \ln x \le \ln 4 \Longrightarrow 2 + \ln 2 \le 2 + \ln x \le 2 + \ln 4$.

Or $2 \le 2 + \ln 2 \le g(x) \le 2 + \ln 4 \le 4$. Donc $g([2\,;4]) \subset [2\,;4]$.

3. Montrons en utilisant l'inégalité des accroisements finis que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \beta| \le \frac{1}{2}|u_n - \beta|$

Déterminons une majoration de $|g'(x)|$

Calculons $g'(x)$: $g'(x) = \frac{1}{x}$.

$x \in [2\,;4] \Leftrightarrow 2 \le x \le 4 \Longrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{4} \le g'(x) \le \frac{1}{2} \Longrightarrow |g'(x)| \le \frac{1}{2}$.

De plus, si $x = u_n \in [2\,;4]$ alors $g(u_n) = u_{n+1} \in [2\,;4]$ d'après la question précédente $\beta \in [2\,;4]$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur un intervalle de bornes β et u_n à la fonction g, on a : $|g(u_n) - g(\beta)| \le \frac{1}{2}|u_n - \beta|$

On remarque que : $h(x) = g(x) - x$ et $h(\beta) = 0 \Leftrightarrow g(\beta) - \beta = 0 \Longrightarrow g(\beta) = \beta$ d'où $|u_{n+1} - \beta| \le \frac{1}{2}|u_n - \beta|$

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouvons que pour tout entier naturel n : $|u_n - \beta| \le 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Posons P_n: $|u_n - \beta| \le 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n

Pour $n = 0$, on a $|u_0 - \beta| = |2 - \beta| \le |4 - 2| = 2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$ vraie

Supposons P_n vraie c'est-à-dire $\left|u_n-\beta\right| \leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons P_{n+1} vraie c'est-à-dire $\left|u_{n+1}-\beta\right| \leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'apèrs la question 3°) on a :

$$\left|u_{n+1}-\beta\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n-\beta\right| \leq 2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

donc $\left|u_{n+1}-\beta\right| \leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ d'où P_{n+1} vraie

P_n: $\left|u_n-\beta\right| \leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n est vraie.

Autre méthode ne repondant pas à la question posée

D'après la question précédente, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\left|u_{k+1}-\beta\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_k-\beta\right|$

Varions k :	$\left\lvert u_{k+1}-\beta\right\rvert \leq \frac{1}{2}\left\lvert u_k-\beta\right\rvert$
$k=0$	$\left\lvert \cancel{u_1-\beta}\right\rvert \leq \frac{1}{2}\left\lvert u_0-\beta\right\rvert$
$k=1$	$\left\lvert \cancel{u_2-\beta}\right\rvert \leq \frac{1}{2}\left\lvert \cancel{u_1-\beta}\right\rvert$
$k=2$	$\left\lvert \cancel{u_3-\beta}\right\rvert \leq \frac{1}{2}\left\lvert \cancel{u_2-\beta}\right\rvert$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$
$k=n-2$	$\left\lvert \cancel{u_{n-1}-\beta}\right\rvert \leq \frac{1}{2}\left\lvert \cancel{u_{n-2}-\beta}\right\rvert$
$k=n-1$	$\left\lvert u_n-\beta\right\rvert \leq \frac{1}{2}\left\lvert \cancel{u_{n-1}-\beta}\right\rvert$
En faisant le produit membre à membre et en simplifiant on a :	$\left\lvert u_n-\beta\right\rvert \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\left\lvert u_0-\beta\right\rvert$

on sait que $2\leq\beta\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq-\beta\leq-2 \Leftrightarrow 2-4\leq u_0-\beta\leq 0 \Rightarrow \left|u_0-\beta\right|\leq 2.$

donc : $\left|u_n-\beta\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left|u_0-\beta\right|\leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5. Déduisons que $\left(u_n\right)$ est convergente :

   $\left|u_n-\beta\right|\leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} u_n=\beta$ d'où (u_n) est une suite convergente et converge vers β.

6. Déterminons un entier N tel que $\left|u_N-\beta\right|\leq 10^{-4}$.

$$\left|u_N-\beta\right|\leq 10^{-4}\implies 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^N\leq 10^{-4}\implies \frac{1}{2^{N-1}}\leq 10^{-4}\implies -\ln 2^{N-1}\leq -4\ln 10$$

$$\implies (N-1)\ln 2\geq 4\ln 10$$

$$\implies N-1\geq\frac{4\ln 10}{\ln 2}$$

$$\implies N\geq\frac{4\ln 10+\ln 2}{\ln 2}=14{,}2877$$

$$\implies N\geq 15$$

« MaliMath » ou « M^2 » est une association née à partir d' un groupe de travail. Elle a été initiée par le département de mathématiques de l' ENSup de Bamako en collaboration avec l' IGEN et Thomas CASTANET.

« MaliMath » réuni des enseignants de mathématiques du fondamental à l' université, des formateurs, des conseillers pédagogiques, des inspecteurs. Depuis 2014, nous produisons des ressources numériques pour l' enseignement des mathématiques du primaire à l' université. Nous organisons aussi des formations à l' adresse des enseignants (ou tout autre acteur de l' éducation) autour de la maitrise et l' usage pédagogique de l' ordinateur et des logiciels pour l' enseignement des mathématiques.

Pour rejoindre le groupe et contribuer aux activités de « MaliMath », contacter