Terminale SE / Applications affines

1. Annales sur les transformations du plan :

Exercice 3963

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives :
$a=5+5\cdot i \quad ; \quad b=5-5\cdot i \quad ; \quad p=10$

On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.

On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_A de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation R_B de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u=i(10-z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.

2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que :
$z\cdot\overline{z}-5\cdot z-5\cdot\overline{z}=0$

 Justifier que le quadrilatère $OAPB$ est inscrit dans Γ.

3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.

 a. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si, et seulement si, :
 $\dfrac{u}{z}=\dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$

 b. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si, et seulement si, M appartient à Γ.

4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?

5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.

 Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.

Exercice 3253

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ *(unité graphique 2 cm)*

On rappelle que pour tout vectuer $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a :
$|z|=\|\vec{w}\| \quad ; \quad \arg(z)=(\vec{u}\,;\,\vec{w})$ à 2π près.

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : on sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
$\arg(zz')=\arg(z)+arg(z')$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :
$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$

Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $3i$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distant de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$z'=\dfrac{iz+3}{z+i}$

1. a. Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre $[AB]$.
 Placer ces points sur le dessin.

 b. On note C le point d'affixe $c=-2+i$. Démontrer que le point C', image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.

2. Pour tout point M du plan distinct de A et de B, démontrer que :
 $\arg(z')=\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)+\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

3. Etude deux ensembles de points.

 a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.

 b. Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B. A quel ensemble appartient le point M'

Exercice 3265

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à une repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}\backslash\{0\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

1. **Question de cours**

 On prend comme pré-requis les résultats suivants :
 - Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
 $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$ à $2k\pi$ près,
 avec k entier relatif.
 - Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z, on a :
 $\arg(z)=\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ à $2k\pi$ près,
 avec k entier relatif.

 a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que :
 $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$ à $2k\pi$ près,
 avec k entier relatif.

 b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) \text{ à } 2k\pi \text{ près,}$$
avec k entier relatif.

2. On considère l'application f de $\mathscr{P}\backslash\{0\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', associe le point M' d'affixe z' définie par :
$$z' = \frac{1}{\overline{z}}$$
   a. Démontrer que pour $z \neq 0$, on a :
   $\arg(z') = \arg(z)$
   à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
   En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P}\backslash\{0\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.
   b. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}\backslash\{0\}$ tels que $f(M) = M$.
   c. M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.
   Etablir l'égalité : $\dfrac{z'-1}{z'-i} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}$
   En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$

3. a. Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si, et seulement si, $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.
   b. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

Exercice 3280

Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe rapporté au repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique 4 cm)*. Soit A le point d'affixe 1. On note f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \frac{1}{z-1}$$

1. a. Soit B le point d'affixe $b = 4+i\sqrt{3}$. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de l'affixe b' de B'.
   b. Déterminer les affixes des points ayant pour image par f leur symétrique par rapport à O.
2. a. Exprimer $|z'|$ et $\arg(z')$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$.
   b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. On suppose que M est un point de $\mathscr{C}$. Déterminer $|z'|$.
   En déduire que M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.
   c. Placer un point M quelconque sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$ et construire son image M'. *(on laissera les traits de construction).*

Exercice 3936

Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique $4\,cm$, on considère le point A d'affixe $A=-1$ et l'application f, du plan $(\mathcal{P})$ dans lui-même, qui aut point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' tel que :
$$z' = \frac{i\cdot z}{z+1}$$

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M'=M$.
2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :
$$OM' = \frac{OM}{AM}$$
$$\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près}$$
3. a. Soit B le point d'affixe $b = -\dfrac{1}{2}+i$.
   Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment $[OA]$.
   b. Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f.
   Etablir que B' appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.
   Placer le point B' et tracer le cercle $(\mathscr{C})$ dans le repère.
   c. En utilisant la question 2., démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
   d. Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
   En s'aidant des résultat de la question 2., construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f *(On laissera apparents les traits de construction).*
4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.
   Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.
   a. On pose $z = x+i\cdot y$ avec x et y réels tels que :
   $(x\,;y) \neq (-1\,;0)$; $(x\,;y) \neq (0\,;0)$
   Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :
$$Im(z') = \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$$
   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.
   b. A l'aide de la question 2., retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

Exercice 4129

La feuille annexe donnée portera les constructions demandées au cours de l'exercice.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$, le point A a pour affixe i.
On note f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \frac{-z^2}{z-i}$$
Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M

1. **Un exemple**
   On considère le point K d'affixe $1+i$.

a. Placer le point K.

b. Déterminer l'affixe du point K' image de K par f.

c. Placer le point K'.

2. Des points pour lesquels le problème ne se pose pas

a. On considère le point L d'affixe $\frac{i}{2}$. Déterminer son image L' par f. Que remarque-t-on ?

b. Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.
Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3. Un procédé de construction

On nomme G l'isobarycentre des points A, M et M' et g l'affixe de G.

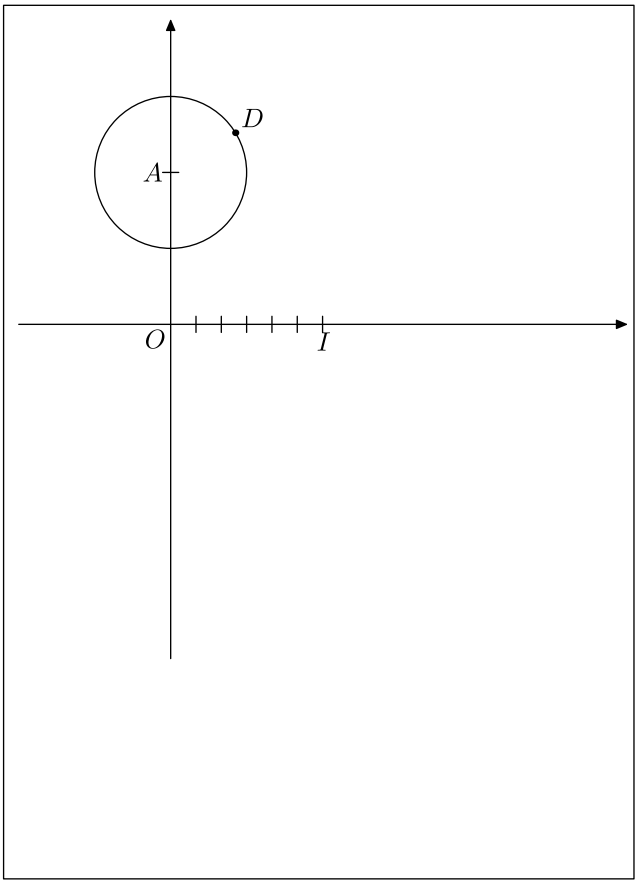
a. Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3\cdot(z-i)}$.

b. En déduire que :
Si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3\cdot r}$.

c. Démontrer que : $\arg(g) = -\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$.

d. Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.
On nomme D' l'image de D par f. Déduire des questions précédentes la construction du point D' et la réaliser sur **la figure annexe à rendre avec la copie**.

Sur la figure ci-dessous le segment $[OI]$ tel que :
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OI}$
est partagé en six segments d'égale longueur.



Exercice 4089

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$, unité graphique $2\,cm$. On appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b'.

a. Calculer a' et b'.

b. Placer les points A, A', B et B'.

c. Démontrer que : $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot i$.

d. En déduire la nature du triangle OBB'.

2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z :

$$z^2 + i\cdot z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot i\right)$$

b. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

c. Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).

3. Soit θ un réel.

a. Démontrer que si $z = e^{i\cdot\theta}$ alors $z' = \left(2\cdot\sin\theta + 1\right)\cdot i$

b. En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe $-i$.

Exercice 3211

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique $1\,cm$.

1. *Question de cours*

On rappelle que : "*Pour tout vecteur* $\vec{w}$ *non nul, d'affixe* z*, on a :*

$|z| = \|\vec{w}\|$ *et* $\arg(z) = \left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$".

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{MP}\right)$.

b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_1 = 4+i \quad ; \quad z_B = 1+i \quad ; \quad z_C = 5i \quad ; \quad z_D = -3-i$

Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = (1+2i)z - 2 - 4i$

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe ω.

4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$z' - z = -2i(2 - i - z)$

b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}\,;\overrightarrow{MM'}\right)$.

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1-i\sqrt{3}$. Ecrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

Exercice 3234

Le complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique $2\,cm$. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.

3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.

4. a. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.

c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que $OP=3$, et construire géométriquement son image P' par f.

5. On considère le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathscr{C}_1$, distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x=2$.

Exercice 3228

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ *(unité graphique* $3\,cm$*)*

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}$$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$z_A = 1+2i \quad ; \quad z_B = 1 \quad ; \quad z_C = 3i$.

Déterminer les affixes des points A', B' C' images respectives de A, B, C par f.

Placer les points A, B, C, A', B', C'.

2. On pose $z = x+iy$ *(avec* x *et* y *réels).*

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.

Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?

4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que M' appartient à la droite (D).

5. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z :

$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\overline{z}}{6} + i\frac{z-\overline{z}}{3}$$

En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{z_A}$ est réel.

b. En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? *(on étudiera deux cas suivant que* N *appartient ou non à* (D)*).*

Effectuer la construction sur la figure.

Exercice 3243

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ *(unité graphique* $2\,cm$*)*, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z_C = 1-i\sqrt{3}$

Partie A

1. a. Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.

b. Placer les points A, B et C.

2. Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.

3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du

plan tels que :

$|z| = |z-2|$

Partie B

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \dfrac{-4}{z-2}$

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z = \dfrac{-4}{z-2}$.
   b. En déduire les points associés aux points B et C.
   c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.
2. a. **Question de cours :**
   Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
   Démontrer que :
   - pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :
     $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
   - pour tout nombre complexe z non nul :
     $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

   b. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2 : $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$

   c. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de $\mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ est l'ensemble défini à la question 3. de la partie **A**.
   Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

Exercice 3881

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, unité graphique $2\,cm$.

On appelle A le point d'affixe $-2i$. A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe :

$z' = -2 \cdot \overline{z} + 2 \cdot i$

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2 \cdot i$.
   Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.
2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).
3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z, on a :
   $|z' + 2 \cdot i| = 2 \cdot |z + 2 \cdot i|$

2. Transformations du plan :

Exercice 4133

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe i.

Pour tout point M d'affixe z tel que $z \neq i$, on définit le point M' dont l'affixe z' est défini par :

$z' = \dfrac{1}{3 \cdot (z-i)}$

1. Etablir la proposition suivante :
   Si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors M' est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3 \cdot r}$.
2. Démontrer que : $arg(z') = -\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AM}\right)$

Exercice 4157

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2).
On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe :

$z' = \dfrac{\overline{z} \cdot (z-2)}{\overline{z}-2}$

1. Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre complexe $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.
2. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
3. Montrer, pour tout point M du plan, que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

Exercice 6020

A tout nombre complexe z tel que $z \neq 2$, on associe le nombre complexe z' définie par :

$z' = \dfrac{z+3}{z-1}$

1. On note $x + i \cdot y$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre complexe z.
   Donner l'écriture algébrique du nombre z', associé à z, en fonction de x et de y.
2. a. On considère l'équation cartésienne :
   $(E)\,:\, x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$
   Justifier que, dans le plan, l'ensemble des solutions de (E) est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(-1\,;0)$ et de rayon 2.

   b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre complexe z' associé soit un imaginaire pur.

3. Ecriture complexes des isometries :

Exercice 3206

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On pose : $a=3$; $b=5-2{\cdot}i$; $c=5+2{\cdot}i$

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.

a. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.

b. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2{\cdot}i}$.

c. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2{\cdot}i}$ soit un nombre réel strictement négatif.

2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2-i$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b. Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

Exercice 3250

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points :
   - A d'affixe a où $a\in\mathbb{R}$;
   - B d'affixe $b+i$ où $b\in\mathbb{R}$;
   - C image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

a. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartiennne à l'axe $\left(O\,;\,\vec{v}\right)$.

b. Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.

2. Dans cette question, on pose $a=\sqrt{3}$ et $b=0$. On considère les points C d'affixe $c=-i$ et D d'affixe $d=2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}$

a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b. Calculer le quotient $\dfrac{d-a}{c-a}$; que peut-on déduire pour le triangle ACD ?

c. Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

e. Déterminer la nature du triangle BEF.

Exercice 3919

Pour chacune des six propositions suivants, indiauer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

Proposition 1 : "z^{100} est un nombre réel".

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que :
$\left|\dfrac{z}{1-z}\right|=1$.

Proposition 2 : "l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels".

3. Soit r la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+i{\cdot}\sqrt{3}$.

Proposition 3 : "l'image du point O par la rotation r a pour affixe $(1-\sqrt{3})+i{\cdot}(1+\sqrt{3})$"

4. On considère l'équation (E) suivante :
$z^2+2{\cdot}\left(\dfrac{\pi}{5}\right){\cdot}z+1=0$

Proposition 4 : "L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1."

Exercice 4301

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$

On considère les points A et B d'affixes respectives :
$a=i$; $b=1+i$

On note :
- r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$;
- r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$;
- r_O la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

On considère :
- le point C d'affixe $c=3{\cdot}i$;
- le point D image de C par r_A ;
- le point G image de D par r_B ;
- le point H image de C par r_0.

On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d=-2+i$.
2. Déterminer g et h
3. Démontrer que le quadrilatère $CDGH$ est un rectangle.

Exercice 3190

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte *(unité graphique : 2 cm)*

1. a. Résoudre l'équation : (E) : $z^2-2\sqrt{3}{\cdot}z+4=0$

b. On considère les nombres complexes :
$z_1=\sqrt{3}+i$; $z_2=\sqrt{3}-i$
Et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.

c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w}=-2\cdot\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que $MNPQ$ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
Placer ces points sur la figure.
Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment $[MN]$.

3. On pose $a=2-\sqrt{3}$:

   a. Montrer que : $1+a^2=4a$; $1-a^2=2a\sqrt{3}$

   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de a.

   c. Montrer que : $|Z|=|Z'|$; $\frac{Z}{Z'}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS

Exercice 3922

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère le point A de $(\mathscr{C})$ d'affixe :

$z_A=e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$

1. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a. Justifier que $(\mathscr{C})$ est le cercle ciconscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

   a. Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

   b. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

   a. Donner l'écriture complexe de h.

   b. Calculer $z_A+z_B+z_C$. En déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.

   c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle $(\mathscr{C})$?

Exercice 3270

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$. L'unité graphique est $2\,cm$.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z}=i$. Ecrire la solution sous forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+4=0$. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
$a=2$; $b=4$; $a'=2i$; $d=2+2i$
Quelle est la nature du triangle ODB ?

4. Soient E et F les points d'affixes respectives :
$e=1-i\sqrt{3}$; $f=1+i\sqrt{3}$
Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$?

5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A' et de rayon 2.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

   a. On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.

   b. Démontrer que le point E' est un point du cercle $\mathscr{C}'$.

   c. Vérifier que : $e-d=\left(\sqrt{3}+2\right)\left(e'-d\right)$.
   En déduire que les points E, E' et D sont alignés.

6. Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

Exercice 3921

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ d'unité graphique : $4\,cm$.

On considère le point A d'affixe $z_A=2+i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2. a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $\left(O\,;\vec{u}\right)$.

   b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B=1$ et $z_C=3$. Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\cdot i$

   a. Calculer le nombre complexe $\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$.

   b. Interpréter géométriquement l'argument du nombre $\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

4. On note (Γ') le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

   a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

   b. Déterminer l'affixe du point N.

5. On désigne par M' l'image du nombre complexe z' véri-

fiant la relation :
$$\frac{z' - z_B}{z_M - z_B} = -i$$

a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z'.

b. Quelle est la nature du triangle $MM'B$?

c. Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ').

