Terminale SE / Equations différentielles

1. Equations differentielles : y'=ay :

Exercice 3745

Dans chaque cas, déterminer la valeur de $a \in \mathbb{R}$ afin que la fonction f soit une solution de l'équation différentielle :
$y' = a{\cdot}y$

a. $f(x) = -3{\cdot}e^{4x}$ b. $f(x) = 4{\cdot}e^{0,2x}$

Correction 3745

a. f est solution de l'équation $(a = 4)$:
$y' = 4{\cdot}y$

La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x) = -12{\cdot}e^{4x}$

Vérifions que f est solution de l'équation différentielle proposée :
$$4{\cdot}f(x) = 4\times\left(-3{\cdot}e^{4x}\right) = -12{\cdot}e^{4x} = f'(x)$$

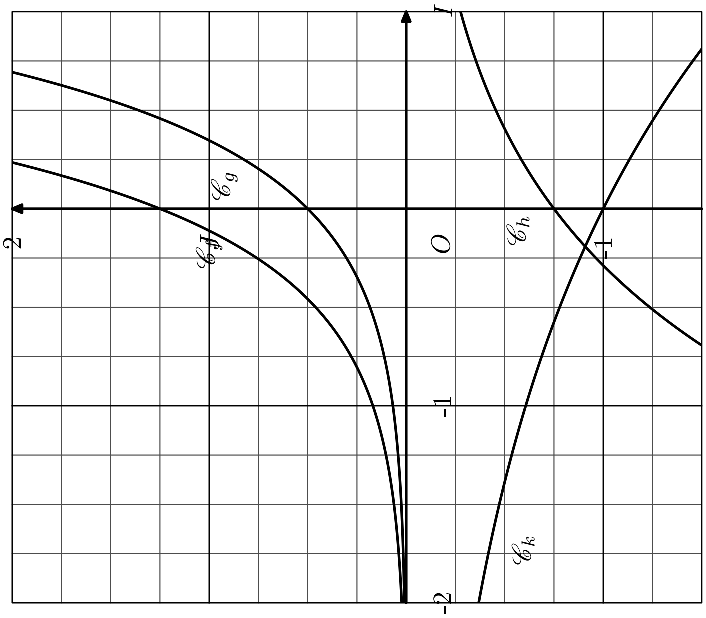
b. f est solution de l'équation $(a = 0,2)$:
$y' = 0,2{\cdot}y$

La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x) = 0,8{\cdot}e^{0,2x}$

Vérifions que f est solution de l'équation différentielle proposée :
$$0,2{\cdot}f(x) = 0,2\times\left(4{\cdot}e^{0,2x}\right) = 0,8{\cdot}e^{0,2x} = f'(x)$$

Exercice 3748

Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbe représentative de fonctions vérifiant l'équation différentielle :
$y' = a{\cdot}y$ pour $a \in \mathbb{R}$



En observant les tangentes à ces courbes au point d'abscisse 0, déterminer l'équation différentielle vérifiée par chacune de ces fonctions.

Correction 3748

- La fonction f vérifie la relation :
$f'(x) = a{\cdot}f(x)$

Appliquer en 0, cela devient :
$$f'(0) = a{\cdot}f(0)$$
$$f'(0) = a{\cdot}\frac{5}{4}$$

La tangente en 0 a pour coefficient directeur : $\dfrac{5}{2}$
$$\frac{5}{2} = a{\cdot}\frac{5}{4}$$
$$a = \frac{5}{2}\times\frac{4}{5}$$
$$a = 2$$

Ainsi, la fonction f vérifie l'équation différentielle :
$y' = 2{\cdot}y$

De cette équation différentielle, on en déduit que la fonction f a pour expression :
$f(x) = C{\cdot}e^{2\cdot x}$

La fonction f doit vérifier également :
$$f(0) = \frac{5}{4}$$
$$C{\cdot}e^{2\cdot 0} = \frac{5}{4}$$
$$C{\cdot}e^{0} = \frac{5}{4}$$
$$C = \frac{5}{4}$$

Ainsi, la fonction f admet pour expression :
$$f(x) = \frac{5}{4}{\cdot}e^{2x}$$

- Graphiquement, on observe le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0. La fonction g vérifie la relation :
$g'(x) = a{\cdot}g(x)$

Appliquer en 0, on a :
$$g'(0) = a{\cdot}g(0)$$
$$1 = a{\cdot}\frac{1}{2}$$
$$a = 2$$

Ainsi, la fonction g vérifie l'équation différentielle :
$y' = 2{\cdot}y$
De fait, l'expression de la fonction g est de la forme :
$g(x) = C{\cdot}e^{2x}$

Par lecture graphique sur l'axe des ordonnées, la fonction g doit vérifiée la relation suivante :

$$g(0) = \frac{1}{2}$$
$$C{\cdot}e^{2\cdot 0} = \frac{1}{2}$$
$$C = \frac{1}{2}$$

L'image d'un nombre réel x par la fonction g est définie par la relation :

$$g(x) = \frac{1}{2}{\cdot}e^{2x}$$

- La fonction h vérifie l'équation différentielle :
  $h'(x) = a{\cdot}h(x)$
  Appliquer en zéro, on obtient :
  $$h'(0) = a{\cdot}h(0)$$
  $$h'(0) = a{\cdot}\Big(-\frac{3}{4}\Big)$$
  Graphiquement, on lit : $h'(0) = \dfrac{3}{4}$
  $$\frac{3}{4} = a{\cdot}\Big(-\frac{3}{4}\Big)$$
  $$a = -1$$
  La fonction h est solution de l'équation différentielle :
  $y' = -y$
  La fonction h admet une expression de la forme :
  $h(x) = C{\cdot}e^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$

  On remarque que la fonction h doit vérifier :
  $$h(0) = -\frac{3}{4}$$
  $$C{\cdot}e^{-0} = -\frac{3}{4}$$
  $$C = -\frac{3}{4}$$
  L'expression de la fonction h est :
  $$h(x) = -\frac{3}{4}{\cdot}e^{-x}$$

- Graphiquement, on observe que la courbe $\mathscr{C}_k$ admet au point d'abscisse 0 une tangente dont le coefficient directeur est $\dfrac{1}{2}$.

  La relation différentielle, appliquée en 0, vérifiée par la fonction k donne l'égalité suivante :
  $$k'(0) = a{\cdot}k(0)$$
  $$\frac{1}{2} = a{\cdot}(-1)$$
  $$a = -\frac{1}{2}$$
  Ainsi, la fonction k vérifie la relation :
  $$y' = -\frac{1}{2}{\cdot}k$$
  La fonction k a pour expression :
  $$k(x) = C{\cdot}e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$
  $$k(0) = -1$$
  $$C{\cdot}e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = -1$$
  $$C = -1$$
  Ainsi, la fonction k a pour expression :
  $$k(x) = -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

Exercice 3750

On cherche à résoudre l'équation différentielle :
$(1) :\ y' - 2y = x{\cdot}e^x$

1. Résoudre l'équation différentielle :
   $(2) :\ y' - 2y = 0,$
   où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $u(x) = \big(a{\cdot}x + b\big){\cdot}e^x$
   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u+v$ est solution de (1).
   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Correction 3750

1. L'équation (2) s'écrit également :
   $y' = 2y$
   Les solutions de cette équation admettent une expression de la forme :
   $f(x) = C{\cdot}e^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

2. a. La fonction u est donnée sous la forme du produit $v{\cdot}w$ où :
   $v(x) = ax + b \quad ; \quad w(x) = e^x$
   qui admettent pour dérivée :
   $v'(x) = a \quad ; \quad w'(x) = e^x$
   Ainsi, par la formule de dérivée d'un produit, la fonction u admet pour expression :
   $$u'(x) = v'(x){\cdot}w(x) + v(x){\cdot}w'(x)$$
   $$= a{\cdot}e^x + (a{\cdot}x + b){\cdot}e^x$$
   $$= (a{\cdot}x + b + a){\cdot}e^x$$
   Puisque la fonction u vérifie l'équation différentielle (1), on doit avoir l'égalité suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$u'(x) - 2u(x) = x{\cdot}e^x$$
   $$(a{\cdot}x + b + a){\cdot}e^x - 2{\cdot}(ax + b){\cdot}e^x = x{\cdot}e^x$$
   $$\Big[(a{\cdot}x + b + a) - 2{\cdot}(ax + b)\Big]{\cdot}e^x = x{\cdot}e^x$$
   $$(-a{\cdot}x + a - b)]{\cdot}e^x = x{\cdot}e^x$$
   La fonction exponentielle est strictement positive :
   $$-a{\cdot}x + a - b = x$$
   Par identification terme à terme de ces polynômes, on a le système suivant :
   $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$ On en déduit les valeurs suivantes de a et de b :
   $a = -1 \quad ; \quad b = -1$
   Ainsi, l'expression de la fonction u est donnée par :
   $u(x) = -(x+1){\cdot}e^x$

   b. Montrons cette équivalence :
   - $\Longrightarrow$ Supposons que la fonction v est solution de l'équation (2) :

Vérifions que la fonction $(u+v)$ est solution de l'équation (2) :

$(u+v)' - 2\cdot(u+v)$

$= \big(u' - 2\cdot u\big) + \big(v' - 2\cdot v\big)$

$= \big(u' - 2\cdot u\big) + \big(v' - 2\cdot v\big)$

u est solution de (1) ; v est solution de 2

$= x\cdot e^x + 0$

$= x\cdot e^x$

On en déduit que la fonction $(u+v)$ est solution de 1

- $\Longrightarrow$ Supposons que $(u+v)$ solution de (1) :

On a alors l'égalité suivante :

$$(u+v)' - 2(u+v) = x\cdot e^x$$
$$u' + v' - 2\cdot u + 2\cdot v = x\cdot e^x$$
$$\big(u' - 2\cdot u\big) + \big(v' + 2\cdot v\big) = x\cdot e^x$$
$$\big(u' - 2\cdot u\big) + \big(v' + 2\cdot v\big) = x\cdot e^x$$

u est solution de (1) :

$$x\cdot e^x + \big(v' + 2\cdot v\big) = x\cdot e^x$$
$$v' + 2\cdot v = 0$$

De l'égalité précédente, on déduit que la fonction v est solution de l'équation différentielle (2).

c. Soit f une solution de (1) ; on montre facilement que $f-u$ est solution de l'équation différentielle (2) ; on en déduit l'existence de $C\in\mathbb{R}$ tel que :

$f(x) - u(x) = C\cdot e^{2x}$

On en déduit :

$$f(x) = C\cdot e^{2x} - (x+1)\cdot e^x$$

3. La solution de l'équation (1) qui s'annule en 0 doit vérifier :

$$f(0) = 0$$
$$C\cdot e^0 - (0+1)\cdot e^0 = 0$$
$$C - 1 = 0$$
$$C = 1$$

Ainsi, l'expression de la fonction recherchée est :

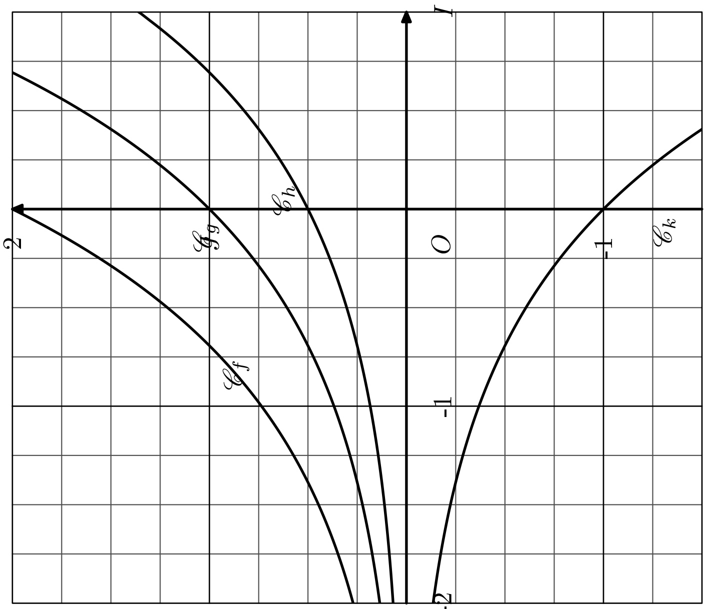
$f(x) = e^{2x} - (x+1)\cdot e^x$

2. Equations differentielles : y'=ay+b :

Exercice 3747

Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbe représentative de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$y' = y$



Déterminer les conditions initiales définissant chacune de ses fonctions.

Correction 3747

Puisque les fonctions associées à chacune de ces courbes vérifient l'équation différentielle :

$y' = y$

alors elles admettent toutes une expression de la forme :

$f(x) = C\cdot e^x$

Ainsi, pour connaître la valeur de C inhérente à chacune de ces fontions, il suffit d'observer l'intersection de chacune d'entre elles avec l'axe des ordonnées :

- $f(0) = 2 \Longrightarrow f(x) = 2\cdot e^x$
- $g(0) = 1 \Longrightarrow f(x) = e^x$
- $h(0) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot e^x$
- $k(0) = 2 \Longrightarrow k(x) = -e^x$

Exercice 3753

En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongueurs vivants au temps t *(exprimé en années)* dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2)\ \begin{cases} u'(x) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{\big[u(t)\big]^2}{12} & \text{pour } t\in\mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

1. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement, si la fonction h

satisfait aux conditions :

$$(E_3)\ \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}\cdot h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle :
$$y' = -\frac{1}{4}\cdot y + \frac{1}{12}$$
et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

3. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Correction 3753

1. Démontrons cette équivalence :

- $\Longrightarrow$ Supposons que le fonction u vérifie (E_2) :

La fonction h est définie par la relation $h = \dfrac{1}{u}$; ainsi, on a :
$$h(0) = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{1} = 1$$
La dérivée de la fonction h s'exprime, en fonction de u, par :
$$h'(t) = -\frac{u'(t)}{\big[u(t)\big]^2}$$
Puisque u vérifie (E_2) :
$$= -\frac{\dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{\big[u(t)\big]^2}{12}}{\big[u(t)\big]^2} = -\frac{u(t)}{4\cdot\big[u(t)\big]^2} - \frac{\big[u(t)\big]^2}{12\cdot\big[u(t)\big]^2}$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{4}\cdot h(t) + \frac{1}{12}$$
La fonction h vérifie les deux conditions de (E_3).

- $\Longleftarrow$ Supposons que la fonction h vérifie (E_3) :

Les fonctions h et u vérifient la relation :
$$h = \frac{1}{u} \Longrightarrow h\cdot u = 1 \Longrightarrow u = \frac{1}{h}$$
Ainsi, la dérivée de la fonction u s'exprime en fonction de u par :
$$u' = -\frac{h'}{h^2}$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$u'(x) = -\frac{h'(x)}{\big[h(x)\big]^2} = -\frac{-\dfrac{1}{4}\cdot h(x) + \dfrac{1}{12}}{\big[h(x)\big]^2}$$
$$= \frac{h(x)}{4\cdot\big[h(x)\big]^2} - \frac{1}{12\cdot\big[h(x)\big]^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\big[h(x)\big]^2}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot u(x) - \frac{1}{12}\cdot\big[u(x)\big]^2$$

Comme $h(0) = 1$, on a :
$$u(0) = \frac{1}{h(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Les solutions de l'équation différentielle :
$$y' = -\frac{1}{4}\cdot y + \frac{1}{12}$$
sont l'ensemble des fonctions f de la forme :
$$f(x) = C\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} - \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} = C\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + \frac{4}{12}$$
$$= C\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + \frac{1}{3}$$
où C est un nombre réel quelconque.

h est la fonction qui vérifie l'équation différentielle ci-dessus et vérifie également la condition initiale suivante :
$$h(0) = 1$$
$$C\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 0} + \frac{1}{3} = 1$$
$$C\cdot e^{0} + \frac{1}{3} = 1$$
$$C + \frac{1}{3} = 1$$
$$C = \frac{2}{3}$$
Ainsi, la fonction h a pour expression :
$$h(x) = \frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + \frac{1}{3}$$

3. Ainsi, la fonction u a pour expression :
$$u(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\dfrac{2}{3}\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + \dfrac{1}{3}}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{2\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + 1}{3}} = \frac{3}{2\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + 1}$$

4. On a la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 2\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + 1 = 1$$
On en déduit la valeur de limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} u(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3}{2\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + 1} = 3$$
Ainsi, le nombre de rongeurs va tendre vers 3 lorsque le temps tendra vers $+\infty$

Exercice 3754

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' + y = 2$ b. $y' - 3y = -3$

c. $6y = 3y' + 2$ d. $5y = \dfrac{3}{2}y' + \dfrac{1}{3}$

Correction 3754

a. L'équation différentielle proposée s'écrit également :
$$y' + y = 2$$
$$y' = -y + 2$$
Les solutions de cette équation sont de la forme :
$$f(x) = C\cdot e^{-x} - \frac{2}{-1}$$
$$= C\cdot e^{-x} + 2 \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

b. L'équation différentielle proposée s'écrit également :
$$y' - 3y = -3$$
$$y' = 3y - 3$$
Les solutions de cette équation sont de la forme :
$$f(x) = C\cdot e^{3x} - \frac{-3}{3}$$
$$= C\cdot e^{3x} + 1 \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

c. L'équation différentielle proposée s'écrit également :

$$6y = 3y' + 2$$
$$6y - 2 = 3y'$$
$$3y' = 6y - 2$$
$$y' = 2y - \frac{2}{3}$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$f(x) = C{\cdot}e^{2x} - \frac{-\frac{2}{3}}{2}$$
$$= C{\cdot}e^{2x} + \frac{1}{3} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

d. L'équation différentielle proposée s'écrit également :

$$5y = \frac{3}{2}y' + \frac{1}{3}$$
$$\frac{3}{2}y' = 5y - \frac{1}{3}$$
$$y' = \frac{2}{3}{\cdot}5y - \frac{2}{3}{\cdot}\frac{1}{3}$$
$$y' = \frac{10}{3}{\cdot}y - \frac{2}{9}$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$f(x) = C{\cdot}e^{\frac{10}{3}\cdot x} - \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{10}{3}}$$
$$= C{\cdot}e^{\frac{10}{3}\cdot x} + \frac{1}{5} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 3755

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $4y' - y = 4 \quad ; \quad y(1) = e$

b. $15y' + 24y = 12 \quad ; \quad y\Big(\frac{5}{4}\Big) = 2$

c. $-\frac{3}{2}y' + \frac{1}{4}y = -1 \quad ; \quad y(3) = 6 + 2e$

Correction 3755

1. La fonction f recherchée doit vérifier l'équation différentielle suivante :

$$4y' - y = 4$$
$$4y' = y + 4$$
$$y' = \frac{1}{4}{\cdot}y + 1$$

Ainsi, la fonction f admet pour expression :

$$f(x) = C{\cdot}e^{\frac{1}{4}\cdot x} - \frac{1}{\frac{1}{4}}$$
$$= C{\cdot}e^{\frac{1}{4}\cdot x} - 4 \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

La condition initiale va nous permettre de déterminer l'expression de la fonction f :

$$f(1) = e$$
$$C{\cdot}e^{\frac{1}{4}\cdot 1} - 4 = e$$
$$C{\cdot}e^{\frac{1}{4}} = e + 4$$
$$C = e^{-\frac{1}{4}}{\cdot}(e+4)$$

On obtient ainsi l'expression complète de la fonction f :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{4}}{\cdot}(e+4)\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x} - 4$$
$$= (e+4)\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x - \frac{1}{4}} - 4$$

2. L'équation différentielle recherchée est :

$$15y' + 24y = 12$$
$$15y' = -24y + 12$$
$$y' = -\frac{24}{15}y + \frac{12}{15}$$
$$y' = -\frac{8}{5}y + \frac{4}{5}$$

Ainsi, la fonction f admet une expression de la forme :

$$f(x) = C{\cdot}e^{-\frac{8}{5}x} - \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{8}{5}}$$
$$= C{\cdot}e^{-\frac{8}{5}x} - \frac{1}{2} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

La condition initiale permet d'obtenir la valeur de C :

$$f\Big(\frac{5}{4}\Big) = 2$$
$$C{\cdot}e^{-\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{4}} - \frac{1}{2} = 2$$
$$C{\cdot}e^{-2} = 2 - \frac{1}{2}$$
$$C{\cdot}e^{-2} = \frac{3}{2}$$
$$C = e^{2}{\cdot}\frac{3}{2}$$

L'expression de la fonction f, solution de l'équation différentielle, est :

$$f(x) = e^{2}{\cdot}\frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{8}{5}x} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{8}{5}x+2} - \frac{1}{2}$$

3. L'équation différentielle recherché peut également s'écrire :

$$-\frac{3}{2}y' + \frac{1}{4}y = -1$$
$$-\frac{3}{2}y' = -\frac{1}{4}y - 1$$
$$y' = \Big(-\frac{2}{3}\Big){\cdot}\Big(-\frac{1}{4}y\Big) - \Big(-\frac{2}{3}\Big){\cdot}1$$
$$y' = \frac{1}{6}{\cdot}y + \frac{2}{3}$$

Ainsi, la fonction f solution de cette équation admet pour expression :

$$f(x) = C{\cdot}e^{\frac{1}{6}x} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}$$
$$= C{\cdot}e^{\frac{1}{6}x} - 4 \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Cherchons la valeur de C afin que la condition initiale soit vérifiée :

$$f(3) = 6 + 2e$$
$$C{\cdot}e^{\frac{1}{6}\cdot 3} - 4 = 6 + 2e$$
$$C{\cdot}e^{\frac{1}{2}} - 4 = 6 + 2e$$
$$C{\cdot}e^{\frac{1}{2}} = 10 + 2e$$
$$C = \big(10 + 2e\big){\cdot}e^{-\frac{1}{2}}$$

L'expression de f est :

$$f(x) = \big(10 + 2e\big){\cdot}e^{-\frac{1}{2}}{\cdot}e^{\frac{1}{6}x} - 4$$
$$f(x) = \big(10 + 2e\big){\cdot}e^{\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}} - 4$$

3. Equations différentielles :

Exercice 3204

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle :
   $(E_\lambda):\ y' = y^2 + \lambda y$
   et la condition $y(0) = 1$.

   On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$:
   $z = \frac{1}{y_0}$

   Ecrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2. **Question de cours** : PRE-REQUIS

   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions :
   $x \longmapsto Ce^{-\lambda x}$
   où C est une constante réelle.

   a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle :
   $(E'_\lambda):\ z' = -(\lambda z + 1)$
   telle que $z(0) = 1$

   b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

3. a. Démontrer que $\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$.
   On pourra étudier sur $]0\,;\,1]$ *la fonction* f *définie par* $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$.

   b. En déduire que $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.
   Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

Correction 3204

1. Montrons que la fonction z vérifie l'équation différentielle z :
   $z' = -\lambda\cdot z - 1$

   Remplaçons z par sa valeur de définition :

   $$z' + \lambda\cdot z + 1 = -\frac{y_0'}{(y_0)^2} + \lambda\cdot\frac{1}{y_0} + 1$$
   $$= \frac{-y_0' + \lambda y_0 + y_0^2}{(y_0)^2}$$

   y_0 étant solution de (E_λ), on a :
   $$= \frac{0}{y_0^2} = 0$$

   On en déduit que la fonction z est solution de l'équation :
   $z' = -\lambda\cdot z - 1$

2. a. Considérons la fonction z_0 définie par :
   $z_\lambda(x) = -\frac{1}{\lambda}$

   On a :
   $$z_\lambda'(x) + \Big(\lambda\cdot z_\lambda(x) + 1\Big) = 0 + \lambda\cdot\Big(-\frac{1}{\lambda}\Big) + 1$$
   $$= -1 + 1 = 0$$
   Ce qui montre :
   $$z_\lambda'(x) = -\Big(\lambda\cdot z_\lambda(x) + 1\Big)$$
   La fonction z_λ vérifie l'équation différentielle $\big(E'_\lambda\big)$.

   Supposons l'existence de z la solution de $\big(E'_\lambda\big)$ telle que $z(0) = 1$, montrons que la fonction $(z - z_\lambda)$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda\cdot y$; on a :
   $(z - z_\lambda)' = z' - z_\lambda'$

   Ces deux fonctions vérifiant l'équation $\big(E_\lambda\big)$, on a :
   $$= -\big(\lambda\cdot z + 1\big) - \Big[-\big(\lambda\cdot z_\lambda + 1\big)\Big] = -\lambda\cdot z - 1 + \lambda\cdot z_\lambda + 1$$
   $$= -\lambda\cdot z + \lambda\cdot z_\lambda = -\lambda\cdot\Big(z - z_\lambda\Big)$$
   Ainsi, la fonction $(z - z_\lambda)$ vérifie l'équation différentielle annoncée ; d'après le pré-requis, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :
   $z - z_\lambda = C\cdot e^{-\lambda x}$

   Ainsi, la fonction z a pour écriture :
   $$z(x) - z_\lambda(x) = C\cdot e^{-\lambda\cdot x}$$
   $$z(x) = C\cdot e^{-\lambda\cdot x} + z_\lambda(x)$$
   $$z(x) = C\cdot e^{-\lambda\cdot x} - \frac{1}{\lambda}$$
   Ceci prouvant l'existence de cette solution de l'équation différentielle.

   Montrons l'unicité de cette solution de l'équation différentielle :
   Considérons deux fonctions z_1 et z_2 vérifiant $\big(E'_\lambda\big)$; on a vu que les fonctions $(z_1 - z_\lambda)$ et $(z_1 - z_\lambda)$ vérifiées l'équation différentielle $y' = -\lambda\cdot y$; il existe C et C' deux constante réelle telles que :
   $$z_1(x) - z_\lambda(x) = C\cdot e^{-\lambda x} \quad ; \quad z_2(x) - z_\lambda(x) = C'\cdot e^{-\lambda x}$$
   Ainsi, on a :
   $$z_2(x) - z_1(x) = \Big[z_2(x) - z_\lambda(x)\Big] - \Big[z_1(x) - z_\lambda(x)\Big]$$
   $$= C'\cdot e^{-\lambda x} - C\cdot e^{-\lambda x} = \Big(C' - C\Big)\cdot e^{-\lambda x}$$
   Or, les deux fonctions z_1 et z_2 vérifiant les mêmes conditions initiales :

$$z_2(0) - z_1(0) = \left(C' - C\right) \cdot e^{-\lambda 0}$$
$$1 - 1 = \left(C' - C\right) \cdot 1$$
$$C' - C = 0$$
On en déduit $C' = C$, ce qui prouve l'unicité de la fonction z_0 solution e l'équation différentielle $\left(E_\lambda\right)$ et de la condition initiale $z(0) = 1$.

b. On a vu que z_0 admet une écriture de la forme :
$$z_0(x) = C \cdot e^{-\lambda \cdot x} - \frac{1}{\lambda}$$
Cette solution doit vérifier $z_0(0) = 1$; on en déduit :
$$z_0(0) = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} - \frac{1}{\lambda}$$
$$1 = C \cdot 1 - \frac{1}{\lambda}$$
$$1 = C \cdot 1 - \frac{1}{\lambda}$$
$$C = 1 + \frac{1}{\lambda}$$
$$C = \frac{\lambda + 1}{\lambda}$$
L'unique solution de l'équation $\left(E'_\lambda\right)$ admet pour écriture :
$$z_0(x) = \frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x} - \frac{1}{\lambda}$$

3. a. Considérons la fonction f définie par :
$$f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{x + 1}$$
f est donnée sous la forme d'une différence $(u - v)$ où :
$$u(x) = \ln(1 + x) \quad ; \quad v(x) = \frac{x}{x + 1}$$
Ces deux fonctions admettent pour dérivée :
$$u'(x) = \frac{1}{1 + x} \quad ; \quad v'(x) = \frac{1 \cdot (x + 1) - x \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$
On en déduit l'expression de f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x) - v'(x) = \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{x + 1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{x}{(x + 1)^2}$$
Le dénominateur de ce quotient étant toujours positif, le signe de f' ne dépend que de son numérateur qui est également positif sur $\left]0\,;\,1\right]$: la fonction f est strictement croissante sur $\left]0\,;\,1\right]$.

En remarquant que $f(0) = \ln 1 - \dfrac{0}{0 + 1} = 0$, on en déduit que la fonction f est strictement positive sur $\left]0\,;\,1\right]$, ce qui permet d'établir l'inégalité suivante :
$$f(x) > 0$$
$$\ln(1 + x) - \frac{x}{x + 1} > 0$$
$$\ln(1 + x) > \frac{x}{x + 1}$$
Comme $\lambda \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, on a :
$$\ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

b. De l'inégalité précédente, on obtient :
$$\ln(1 + \lambda) \quad > \quad \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$
$$\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 + \lambda) \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$
$$\ln(1 + \lambda) \quad > \quad \frac{1}{\lambda + 1}$$
Or, $\lambda \in \left]0\,;\,1\right] \Longrightarrow 0 < \lambda \leqslant 1$
$$\Longrightarrow 1 < \lambda + 1 \leqslant 2$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$
$$\Longrightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{\lambda + 1} \geqslant \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow 1 > \frac{1}{\lambda + 1} \geqslant \frac{1}{2}$$
Appliquée à l'inégalité précédente, on obtient :
$$\ln(1 + \lambda) > \frac{1}{2}$$

4. Les zéros de la fonction z_0 doivent vérifier l'équation suivante :
$$z_0(x) = 0$$
$$\frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x} - \frac{1}{\lambda} = 0$$
$$\frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x} = \frac{1}{\lambda}$$
Or, $\lambda \in \left]0\,;\,1\right] \Longrightarrow \dfrac{\lambda + 1}{\lambda} > 0$:
$$e^{-\lambda \cdot x} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \frac{1}{\lambda}$$
$$e^{-\lambda \cdot x} = \frac{1}{\lambda + 1}$$
La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
$$\ln\left(e^{-\lambda \cdot x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\lambda + 1}\right)$$
$$-\lambda \cdot x = \ln\left(\frac{1}{\lambda + 1}\right)$$
$$x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{\lambda + 1}\right)$$
$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\lambda + 1\right)$$
Or, la question 3. b. montre que, pour tout $\lambda \in \left]0\,;\,1\right]$, on a :
$$\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 + \lambda) > \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{1}{2}$$
On en déduit que z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

Ainsi, il est possible de définir, sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, la fonction z définie par :
$$z = \frac{1}{z_0}$$
Et d'après la question 1., z est solution de l'équation différentielle et elle vérifie la condition :
$$z(0) = \frac{1}{z_0(0)} = \frac{1}{1} = 1$$
Pour montrer que cette solution est positive sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, il suffit de montrer que z_0 l'est :

$$\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot x}-\frac{1}{\lambda}>0$$
$$\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot x}>\frac{1}{\lambda}$$
$$e^{-\lambda\cdot x}>\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{\lambda}$$
La fonction logartihme est strictement croissante
$$\ln\left(e^{-\lambda\cdot x}\right)>\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$-\lambda\cdot x>\ln\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)$$
$$x<-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)$$
Or, la question 3. b. permet d'affirmer :
$$x<\frac{1}{2}$$
La fonction z est strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$

Exercice 3248

QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 0,75 point, chaque erreur enlève 0,25 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Vous répondrez sur votre copie en indiquand le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse :

1. L'équation $e^{2x}-3e^x-4=0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution	b. 1 solution
c. 2 solutions	d. plus de 2 solutions

2. L'expression $-e^{-x}$

a. n'est jamais négative	b. est toujours négative
c. n'est négative que si x est positif	d. n'est négative que si x ets négatif

3. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+2}=$

a. $-\frac{1}{2}$	b. 1
c. 2	d. $+\infty$

4. L'équation différentielle $y=2y'-1$ a pour ensemble de solutions :

a. $x\mapsto ke^{2x}-1$ avec $k\in\mathbb{R}$	b. $x\mapsto ke^{\frac{1}{2}x}+1$ avec $k\in\mathbb{R}$
c. $x\mapsto ke^{\frac{1}{2}x}-1$ avec $k\in\mathbb{R}$	d. $x\mapsto ke^{2x}+\frac{1}{2}$ avec $k\in\mathbb{R}$

Correction 3248

1. Cette équation ne possède qu'une unique solution *(réponse b.)* :

Considérons le polynôme P définie par :
$P(x)=x^2-3x-4$
Son discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25$
On a la simplification suivante $\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-5}{2\times1}=\frac{-2}{2}=1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+5}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$$

Considérons les deux fonctions f et h définies par :
$f(x)=e^{2x}-3e^x-4\quad;\quad h(x)=e^x$

On remarque qu'on a :
$f(x)=\big(P\circ h\big)(x)$
D'après l'étude du polynôme P, pour que f s'annule, il est nécessaire que $h(x)=-1$ ou $h(x)=4$.

- La fonction exponentielle étant positive, l'équation $h(x)=-1$ n'admet aucune solution.
- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0\,;+\infty[$; d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, il existe un seul nombre $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que :
  $h(\alpha)=4\implies f(\alpha)=0$

2. L'expression $-e^{-x}$ est toujours négative *(réponse b.)* :

La fonction exponentielle est positive :
$$-x\in\mathbb{R}\implies exp(-x)>0$$
$$\implies -exp(-x)<0$$

3. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+2}=2$ *(réponse c.)* :

On a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{2e^x-1}{e^x+2}=\frac{e^x\left(2-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}=\frac{2-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}$$
D'après le cours, on a :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ On en déduit :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$$
On a ainsi la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2-\dfrac{1}{e^x}}{1+\dfrac{2}{e^x}}=\frac{2}{1}=2$$

4. Les solutions de l'équation différentielles sont les fonctions de la forme $\left(x\mapsto ke^{\frac{1}{2}x-1}\right)$ avec $k\in\mathbb{R}$:

L'établissement de ce résultat fait parti du cours ; ici, on se comptentera seulement de montrer que la famille de fonctions définies à la réponse c. vérifie cette équation différentielle.

Posons, $f(x)=k{\cdot}e^{\frac{1}{2}x-1}-1$ où $k\in\mathbb{R}$, on a :

$f'(x)=k{\cdot}\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}-0=\dfrac{1}{2}ke^{\frac{1}{2}x}$

Montrons que ces fonctions vérifient l'équation différentielle demandée :

$$2y'-1=2{\cdot}f'(x)-1=2{\cdot}\Big(\frac{1}{2}k{\cdot}e^{\frac{1}{2}x}\Big)-1$$
$$=k{\cdot}e^{\frac{1}{2}x}-1=f(x)$$

4. Equations différentielles :

Exercice 3760

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}$$

Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$y'+y=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}$$

Correction 3760

La fonction f est définie par le quotient de la fonction u par la fonction$v$ définie par :

$u(x)=\ln\left(e^{2x}-1\right)\quad;\quad v(x)=e^x$

Déterminons les dérivées de ces trois fonctions :

- la fonction u est définie par la composée de la fonction t par la fonction w où :
  $w(x)=\ln x\quad;\quad t(x)=e^{2x}-1$
  qui admettent pour dérivée les expressions :
  $w'(x)=\dfrac{1}{x}\quad;\quad t'(x)=2{\cdot}e^{2x}$

  Ainsi, la dérivée u' de la fonction u a pour expression :
  $$u'(x)=t'(x){\cdot}w'\big[t(x)\big]=2{\cdot}e^{2\cdot x}{\cdot}\frac{1}{e^{2\cdot x}-1}=\frac{2{\cdot}e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}-1}$$
- La fonction v admet pour dérivée la fonction v' dont l'expression est :
  $v'(x)=e^x$

Ainsi, la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression :

$$f'(x)=\frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{\dfrac{2{\cdot}e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}-1}{\cdot}e^x-\ln\left(e^{2x}-1\right){\cdot}e^x}{\left(e^x\right)^2}$$
$$=\frac{\dfrac{2{\cdot}e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}-1}{\cdot}e^x-\ln\left(e^{2x}-1\right){\cdot}e^x}{e^{2\cdot x}}$$

Ainsi, la somme $f+f'$ a pour expression :

$f(x)+f'(x)$
$$=\frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}+\frac{\dfrac{2{\cdot}e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}-1}{\cdot}e^x-\ln\left(e^{2x}-1\right){\cdot}e^x}{e^{2\cdot x}}$$
$$=\frac{e^x{\cdot}\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{2\cdot x}}+\frac{\dfrac{2{\cdot}e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}-1}{\cdot}e^x-\ln\left(e^{2x}-1\right){\cdot}e^x}{e^{2\cdot x}}$$
$$=\frac{e^x{\cdot}\ln\left(e^{2x}-1\right)\dfrac{2{\cdot}e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}-1}{\cdot}e^x-\ln\left(e^{2x}-1\right){\cdot}e^x}{e^{2\cdot x}}$$

5. Equations différentielles : annales :

Exercice 3241

Les parties A et B sont indépendantes.
Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t *(exprimé en années à partir de l'origine 2000)*.

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E):\ y'=-\frac{1}{20}y(3-\ln y)$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t)=-\dfrac{1}{20}f(t)\Big[3-\ln\big(f(t)\big)\Big]$ si, et seulement si, la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $\big[0\,;+\infty\big[$, $g'(t)=\dfrac{1}{20}g(t)-\dfrac{3}{20}$

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
   $(H):\ z'=\dfrac{1}{20}z-\dfrac{3}{20}.$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\,;+\infty[$:

$$f(t) = \exp\left[3 + C\cdot\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$$
(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \longmapsto e^x$)

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$$
   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
   c. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.
   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à ving individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : "*La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas*".

On note M l'évènement "*l'animal est malade*", $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement "*le test est positif*".

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Correction 3241

1. • $\Longrightarrow$:
Supposons que la fonction f vérifie :
$$f'(t) = -\frac{1}{20}\cdot f(t)\cdot\Big[3 - \ln\big(f(t)\big)\Big]$$
La formule de dérivée d'une composée donne pour $t \in \big[0\,;+\infty\big[$:
$$g'(t) = f'(t)\cdot\frac{1}{f(t)} = -\frac{1}{20}\cdot f(t)\cdot\Big[3 - \ln\big(f(t)\big)\Big]\cdot\frac{1}{f(t)}$$
$$= -\frac{1}{20}\cdot\Big[3 - \ln\big(f(t)\big)\Big] = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}\cdot\ln\big(f(t)\big)$$
$$= -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}\cdot g(t)$$
• $\Longleftarrow$:
Supposons que la fonction g vérifie :
$$g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$$
La formule de dérivée de composée donne :
$$f'(t)\cdot\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{20}\cdot\ln\big(f(t)\big) - \frac{3}{20}$$
$$f'(t) = f(t)\cdot\Big[\frac{1}{20}\cdot\ln\big(f(t)\big) - \frac{3}{20}\Big]$$
$$f'(t) = -\frac{1}{20}\cdot f(t)\cdot\Big[3 - \ln\big(f(t)\big)\Big]$$

2. Les solutions générales de l'équation différentielle $y' = a\cdot y + b$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ sont de la forme :
$$y(t) = C\cdot e^{a\cdot x} - \frac{b}{a} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$
En appliquant ce résultat de cours à l'équation différentielle (H), on obtient la solution générale de cette équation différentielle :
$$z(t) = C\cdot e^{\frac{1}{20}x} - \frac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = C\cdot e^{\frac{1}{20}x} + 3$$

3. La fonction g vérifie l'équation différentielle (H), elle admet, d'après la question précédente, une expression de la forme :
$$g(t) = C\cdot e^{\frac{1}{20}x} + 3$$
A l'aide de la question 1., on a :
$$\ln\big(f(t)\big) = C\cdot e^{\frac{1}{20}x} + 3$$
$$e^{\ln\big(f(t)\big)} = e^{C\cdot e^{\frac{1}{20}x}+3}$$
$$f(t) = \exp\Big[C\cdot\exp\big(\tfrac{1}{20}x\big) + 3\Big]$$

4. a. On a la limite suivante :
$$\lim_{t\mapsto+\infty} 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) = -\infty$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{t\mapsto+\infty} f(t) = \lim_{t\mapsto+\infty}\exp\Big[C\cdot\exp\big(\tfrac{1}{20}x\big) + 3\Big] = 0$$
   b. A l'aide de la question 1., on a l'expression de la dérivée de la fonction f :
$$f'(t) = -\frac{1}{20}\cdot f(t)\cdot\Big[3 - \ln\big(f(t)\big)\Big]$$
$$= -\frac{1}{20}\cdot f(t)\cdot\Big[3 - \Big(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\Big)\Big]$$
$$= -\frac{1}{20}\cdot f(t)\cdot 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)$$
La fonction f est strictement positive sur $\big[0\,;+\infty\big[$, ainsi que la fonction exponentielle. On en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\big[0\,;+\infty\big[$: la fonction f est strictement décroissante.
   c. Résolvons l'inéquation suivante :
$$f(t) < 0{,}02$$
$$\exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < 0{,}02$$
La fonction ln est strictement croissante
$$\ln\left(\exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]\right) < \ln(0{,}02)$$
$$3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(0{,}02)$$
$$3\exp\left(\frac{t}{20}\right) > 3 - \ln(0{,}02)$$
$$\exp\left(\frac{t}{20}\right) > 1 - \frac{\ln(0{,}02)}{3}$$
$$\ln\left[\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] > \ln\left(1 - \frac{\ln(0{,}02)}{3}\right)$$
$$\frac{t}{20} > \ln\left(1 - \frac{\ln(0{,}02)}{3}\right)$$
$$t > 20\ln\left(1 - \frac{\ln(0{,}02)}{3}\right)$$
A l'unité près, on a :
$$20\ln\left[1 - \frac{\ln(0{,}02)}{3}\right] \simeq 16{,}69$$
La fonction f exprime en fonction des années, la taille de cet échantillon en milliers ; ainsi, la taille de cet échantillon sera inférieure à 20 individus au bout de

17 ans.

Partie B

1. D'après l'énoncé :
   - $P(M) = 0{,}5$ car :
     "*La population testée comporte 50 % d'animaux malades*".
   - $P_M(T) = 0{,}99$ car :
     "*Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas*".
   - $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}001$ car :
     "*Si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas*".

2. Les deux événements M et $\overline{M}$ sont deux événements contraires ; on a :

$$T = \left(T \cap M\right) \cup \left(T \cap \overline{M}\right)$$

Les événements $T \cap M$ et $T \cap \overline{M}$ sont disjoints :

$$P(T) = P\left(T \cap M\right) + P\left(T \cap \overline{M}\right)$$

En utilisant les probabilités conditionnelles, on a :

$$P(T) = P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M})$$

$$P(T) = 0{,}99 \times 0{,}5 + 0{,}001 \times 0{,}5 = 0{,}4955$$

3. En utilisant la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_M(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)}$$

$$P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M)$$

Par application numérique, on a :

$$P(M \cap T) = 0{,}99 \times 0{,}5 = 0{,}495$$

Déterminons la valeur de la probabilité conditionnelle $P_T(M)$:

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}495}{0{,}4955} \simeq 0{,}998991$$

On en déduit que ce test n'est pas fiable.

Exercice 3312

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$$

1. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.
2. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1) :\ y' = \frac{y}{4}$$

   a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est à dire $g(0) = 1$.

   c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t *(exprimé en années)* dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{\left[u(t)\right]^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions.

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

   b. Donner les solutions de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$

   et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Correction 3312

Partie A

1. On a :

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}} = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{4}}\left(2 \cdot \frac{1}{e^{\frac{x}{4}}} + 1\right)} = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$$

On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \mapsto -\infty} 1 + 2e^{-\frac{x}{4}} = +\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}} = 0$$

- $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \mapsto +\infty} 1 + 2e^{-\frac{x}{4}} = 1$

$$\Longrightarrow \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}} = 3$$

2. La fonction f est donnée sous la forme d'un quotient $\dfrac{3}{u}$ où :

$u(x) = 1 + 2e^{-\frac{x}{4}}$

qui admet pour dérivée :

$u'(x) = 0 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)2e^{-\frac{x}{4}} = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}}$

On en déduit l'expression de la dérivée f' de la fonction f :

$$f'(x) = -\frac{3\cdot u'(x)}{\left[u(x)\right]^2} = -\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}}\right)}{\left[1+2e^{-\frac{x}{4}}\right]^2}$$

$$= \frac{3e^{-\frac{x}{4}}}{2\left[1+2e^{-\frac{x}{4}}\right]^2}$$

Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. a. L'équation différentielle (E_1) s'écrit :

$(E_1) = y' = \dfrac{1}{4}\cdot y$

Les solutions générales de cette équation différentielle sont de la forme :

$f(x) = C\cdot e^{\frac{1}{4}x}$ où C est une constante réelle

b. La condition imposée à la solution recherchée est !

$g(0) = 1$

La constante C doit vérifier :

$$C\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot 0} = 1$$
$$C\cdot e^0 = 1$$
$$C\cdot 1 = 1$$
$$C = 1$$

Ainsi, la solution de l'équation différentielle (E_1) vérifiant la condition $g(0) = 1$ est :

$g(x) = e^{\frac{1}{4}x}$

c. Pour savoir en combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois, il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

$$g(x) \geqslant 3$$
$$e^{\frac{1}{4}x} \geqslant 3$$

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(e^{\frac{1}{4}x}\right) \geqslant \ln(3)$$
$$\frac{1}{4}x \geqslant \ln(3)$$
$$x \geqslant 4\cdot\ln(3)$$

Or, $4\ln(3) \simeq 4{,}4$; ainsi, la population de rongeurs dépassera 300 rongeurs au bout de 5 ans.

2. a. • $\Longrightarrow$:

La fonction h est définie par le quotient $\dfrac{1}{u}$; elle admet pour dérivée :

$h' = -\dfrac{u}{u^2}$

Effectuons des transformations sur l'écriture de $h'(t)$:

$$h'(t) = -\frac{u'(t)}{\left[u(t)\right]^2} = -\frac{\frac{u(t)}{4} - \frac{\left[u(t)\right]^2}{12}}{\left[u(t)\right]^2}$$

$$= -\frac{\frac{u(t)}{4}}{\left[u(t)\right]^2} + \frac{\frac{\left[u(t)\right]^2}{12}}{\left[u(t)\right]^2} = -\frac{4}{u(t)} + \frac{1}{12}$$

On a également $h(0) = \dfrac{1}{u(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Ce qui montre cette implication.

• $\Longleftarrow$:

Supposons que la fonction h satisfisfasse aux conditions (E_3) ; h est définie par :

$h = \dfrac{1}{u} \quad\Longrightarrow\quad u = \dfrac{1}{h}$

La dérivée de la fonction u peut s'exprimer :

$$u' = -\frac{h'}{h^2}$$

$$u'(t) = -\frac{h'(t)}{\left[h(t)\right]^2} = -\frac{-\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}}{\left[h(t)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{h(t)} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\left[h(t)\right]^2}$$

En utilisant l'égalité $u = \dfrac{1}{h}$:

$$= \frac{1}{4}\cdot u(t) - \frac{1}{12}\cdot\left[u(t)\right]^2 = \frac{u(t)}{4} - \frac{\left[u(t)\right]^2}{12}$$

b. L'équation différentielle $y' = a\cdot y + b$ admet pour solution généralte, les fonctions f de la forme :

$f(x) = C\cdot e^{a\cdot x} - \dfrac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$

En appliquant ce résultat à l'équation différentielle (E_3), on obtient que la fonction h admet une écriture de la forme :

$$h(x) = C\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + \frac{1}{3}$$

On obtient la valeur du réel C en utilisant la condition $h(0) = 1$ de l'équation (E_3) :

$$h(0) = 1$$
$$C\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 0} + \frac{1}{3} = 1$$
$$C\cdot 1 + \frac{1}{3} = 1$$
$$C = 1 - \frac{1}{3}$$
$$C = \frac{2}{3}$$

Ainsi, la fonction h admet pour écriture :

$$h(x) = \frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + \frac{1}{3}$$

La fonction u admet pour écriture :

$$h(x) = \frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + \frac{1}{3}$$

$$h(x) = \frac{2\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + 1}{3}$$

$$\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\frac{2\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + 1}{3}}$$

$$u(x) = \frac{3}{2\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot x} + 1}$$

c. D'après la question 2. de la partie **A**, on obtient la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} u(x) = 0$$
On en déduit que la taille de la population de rongeurs va tendre vers 0 ; les rongeurs vont disparaître.

Exercice 4135

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équations différentielle $y' = a\cdot y$ où $a\in\mathbb{R}$ sont les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = K\cdot e^{a\cdot x} \quad \text{où } K\in\mathbb{R}.$$

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle :
$$(E) : y' = a\cdot y + b \quad \text{où } a\in\mathbb{R}^* \text{ et } b\in\mathbb{R}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$u(x) = -\frac{b}{a}$$
est une solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

f est solution de $(E) \Longleftrightarrow f-u$ est solution de l'équation différentielle $y' = a\cdot y$.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

Partie B

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$. Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :
$$10\cdot v'(t) + v(t) = 30$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est à dire que $v(0)=0$.

1. Démontrer que :
$$v(t) = 30\cdot\Big(1 - e^{-\frac{t}{10}}\Big)$$

2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.

   b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0{,}1\,m\cdot s^{-2}$. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1 et t_2 est donnée par :
$$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$$
Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

Correction 4135

Partie A :

1. Vérifions que la fonction u est une solution de l'équation (E) ; pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$a\cdot u(x) + b = a\times\Big(-\frac{b}{a}\Big) + b = -b + b = 0$$
Or u étant une fonction constante, ce qui montre $u' = 0$.

   La fonction u est solution de l'équation (E)

2. - Supposons que la fonction f est solution de (E) :
   On a :
   - $\big(f-u\big)'(x) = f'(x) - u'(x) = f'(x) = a\cdot f(x) + b$
   - $\Big[a\cdot\big(f-u\big)\Big](x) = a\cdot\Big[\big(f-u\big)(x)\Big]$
   $$= a\cdot\big(f(x) - u(x)\big) = a\cdot f(x) - a\cdot u(x)$$
   $$= a\cdot f(x) - a\cdot\Big(-\frac{b}{a}\Big) = a\cdot f(x) + b$$
   On en déduit l'égalité : $\big(f-u\big)' = a\cdot\big(f-u\big)$
   $\big(f-u\big)$ est solution de l'équation différentielle $y' = a\cdot y$.
   - Supposons que le fonction $\big(f-u\big)$ est solution de l'équation différentielle :
   $$y' = a\cdot y$$
   Ainsi, on a l'égalité suivante pour tout réel x :
   $$\big(f-u\big)'(x) = a\cdot\big(f-u\big)(x)$$
   $$f'(x) - u'(x) = a\cdot\big[f(x) - u(x)\big]$$
   $$f'(x) - 0 = a\cdot f(x) - a\cdot u(x)$$
   $$f'(x) = a\cdot f(x) - a\cdot\Big(-\frac{b}{a}\Big)$$
   $$f'(x) = a\cdot f(x) + b$$
   On en déduit que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

3. Soit f une fonction solution de (E) ; alors $f-u$ est solution de l'équation différentielle : $y' = a\cdot y$

   D'après le résultat rappelé en début d'énoncé, il existe un réel K permettant d'exprimer $f-u$ pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$(f-u)(x) = K\cdot e^{a\cdot x}$$
$$f(x) - u(x) = K\cdot e^{a\cdot x}$$
$$f(x) = K\cdot e^{a\cdot x} + u(x)$$
$$f(x) = K\cdot e^{a\cdot x} - \frac{b}{a}$$

Partie B

1. L'équation différentielle vérifiée par la fonction v s'écrit :

$$10\cdot v'(t) + v(t) = 30$$
$$10\cdot v'(t) = -v(t) + 30$$
$$v'(t) = -\frac{1}{10}\cdot v(t) + \frac{30}{10}$$
$$v'(t) = -\frac{1}{10}\cdot v(t) + 3$$

D'après la partie **B**, on en déduit qu'il existe un réel K vérifiant :

$$v(t) = K\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t} - \frac{3}{-\frac{1}{10}}$$
$$v(t) = K\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t} + 30$$

La condition initiale doit vérifier :

$$v(0) = 0$$
$$K\cdot e^{-\frac{1}{10}\times 0} + 30 = 0$$
$$K\cdot e^{0} + 30 = 0$$
$$K + 30 = 0$$
$$K = -30$$

Ainsi, la fonction f admet l'expression :

$$v(t) = K\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t} + 30$$
$$= -30\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t} + 30$$
$$= 30\cdot\left(-e^{-\frac{1}{10}\cdot t} + 1\right)$$
$$= 30\cdot\left(1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot t}\right)$$

2. a. La fonction v admet pour expression :

$$v(t) = 30\cdot\left(1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot t}\right) = 30 - 30\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t}$$

Ainsi, la fonction v admet pour dérivée la fonction v' dont l'expression est :

$$v'(t)0 - \left[30\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t}\right] = 3\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t}$$

La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction v est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. On a la limite suivante :

$$\lim_{t\mapsto+\infty} e^{-\frac{t}{10}} = 0 \Longrightarrow \lim_{t\mapsto+\infty} v(t) = 30.$$

3. Résolvons l'inéquation suivante :

$$v'(t) \leqslant 0{,}1$$
$$3\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t} \leqslant 0{,}1$$
$$e^{-\frac{1}{10}\cdot t} \leqslant \frac{1}{30}$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left[e^{-\frac{1}{10}\cdot t}\right] \leqslant \ln\left(\frac{1}{30}\right)$$
$$-\frac{1}{10}\cdot t \leqslant -\ln 30$$
$$t \geqslant (-\ln 30)\cdot(-10)$$
$$t \geqslant 10\cdot \ln 30$$

On a la valeur approchée : $10\cdot\ln 30 \simeq 34{,}01$.
On en déduit que c'est à partir de la $35^{\text{ième}}$ seconde que la vitesse du cycliste est stabilisé.

4. On a la valeur de l'intégale suivante :

$$\int_0^{35} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{35} 30\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{35} 30 - 30\cdot e^{-\frac{t}{10}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[30\cdot t\right]_0^{35} + 300\cdot\int_0^{35} -\frac{1}{10}\cdot e^{-\frac{t}{10}}$$
$$= 30\times 35 - 30\times 0 + 300\cdot\left[e^{-\frac{t}{10}}\right]_0^{35}$$
$$= 1050 + 300\cdot\left(e^{-\frac{35}{10}} - e^{-\frac{0}{10}}\right)$$
$$= 1050 + 300\cdot\left(e^{-\frac{35}{10}} - 1\right) = 750 + 300\cdot e^{-\frac{35}{10}}$$
$$\simeq 759{,}1\,m$$

