

Terminale SE / Probabilité

1. Dénombrement et équiprobabilité :

Exercice 5366

On considère un jeu de 52 cartes et les événements suivants :

- A : "la carte est de couleur rouge" ;
- B : "la carte n'est pas une figure".

Déterminer les probabilités suivantes :

- a. $\mathcal{P}(B)$ b. $\mathcal{P}(B \cap A)$ c. $\mathcal{P}(B \cup A)$ d. $\mathcal{P}(\overline{B} \cap A)$

Correction 5366

- a. Il y a 12 figures dans ce jeu de cartes. Ainsi :

$$\mathcal{P}(B) = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$$

- b. Il y a 20 cartes de couleurs rouges qui ne soient pas une figure :

$$\mathcal{P}(B \cap A) = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}$$

- c. Il y a 46 cartes vérifiant l'évènement $B \cup A$:

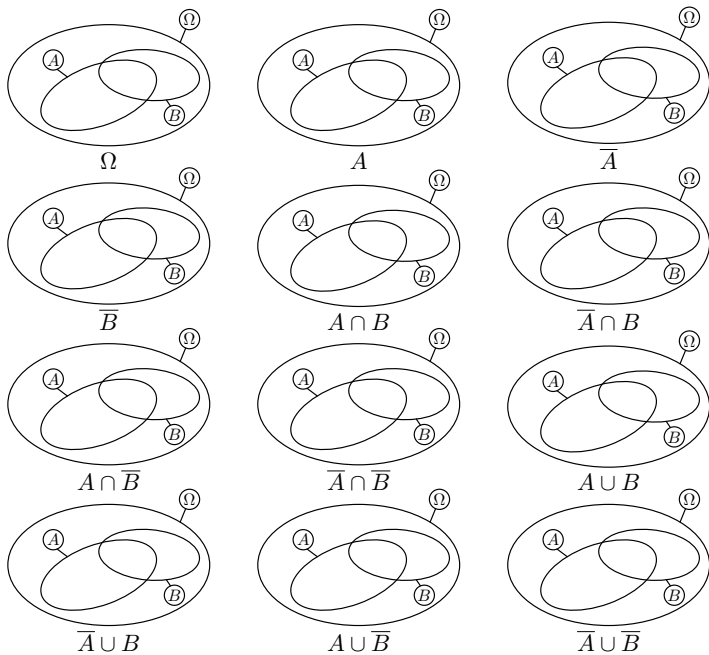
$$\mathcal{P}(B \cup A) = \frac{46}{52} = \frac{23}{26}$$

- d. Il y a 6 figures rouges :

$$\mathcal{P}(\overline{B} \cap A) = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$$

Exercice 5866

1. Ci-dessous sont représentés l'univers Ω d'une expérience aléatoire et deux événements A et B de Ω . Pour chacune des représentations ci-dessous, hachurer l'ensemble demandé.

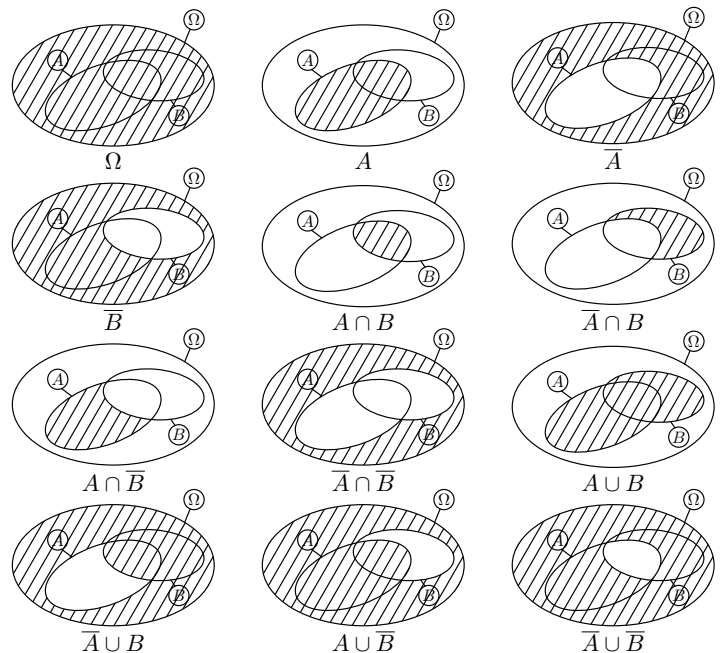


2. Donner, sans justification, une expression simplifiée des ensembles :

- a. $\overline{A \cap B}$ b. $\overline{A \cup B}$

Correction 5866

1. Voici les ensembles représentés :



2. On a les égalités :

- a. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

5. Intersection et union d'événements :

Exercice 3185

Un tournoi d'échec affronte deux équipes contenant chacune un homme et une femme. Une partie oppose une personne de chaque équipe.

On choisit au hasard une personne de chaque équipe pour s'affronter au cours d'une partie. On considère les trois événements qui "omposent" l'univers des possibilités :

- A : "Deux hommes s'affrontent dans cette partie"

- B : "Deux femmes s'affrontent dans cette partie"
- C : "Un homme et une femme s'affrontent dans cette partie"

1. Conjecturer la probabilité de chacun de ces événements.

2. On utilise la notation suivante pour désigner la composition de chaque groupe :

$$\mathcal{G}_1 = \{H_1; F_1\} \quad ; \quad \mathcal{G}_2 = \{H_2; F_2\}$$

- a. Décrire toutes les parties organisables lors de ce

tournoi.

- b. Donner la probabilité des événements A , B et C .

Correction 3185



1. Il était attendu que les élèves, en majorité, pensent à l'égalité des probabilités de ces événements. La question suivante montrera que ce n'est pas le cas.

2. a. Les couples ci-dessous représentent les différentes parties organisables :

$(H_1; H_2)$; $(H_1; F_2)$; $(F_1; H_2)$; $(F_1; F_2)$

- b. Chacun de ses événements ont la même chance de se réaliser, ainsi on obtient les probabilités suivantes :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{4} ; \quad \mathcal{P}(B) = \frac{1}{4} ; \quad \mathcal{P}(C) = \frac{1}{2}$$

6. Variables aléatoires :

Exercice 5180



Un petit restaurant propose à son menu trois plats et deux desserts. Voici la description de son menu :

● Spaguetti 6€	● Salade de fruits 2€
● Filet de boeuf 7€	● Crème anglaise 3€
● Entrecote 8€	

Chaque client rentrant dans les restaurants prend exactement un plat et un dessert.

1. En prenant un client au hasard à la sortie du restaurant, préciser quel peut être le montant de sa facture.
2. On supposant que toutes les combinaisons $\text{plat}/\text{dessert}$ ont la même probabilité d'être choisies par un client.
 - a. Combien de combinaison peut-on créer à partir de ce menu ?
 - b. Quel est la probabilité pour qu'un client ait payé 8€ ? 11€ ?
 - c. Montrer que la probabilité d'avoir une facture d'un montant de 10€ est de $\frac{1}{3}$.
 - d. Compléter le tableau ci-dessous :

Montant de la facture	8	9	10	11
Probabilité				

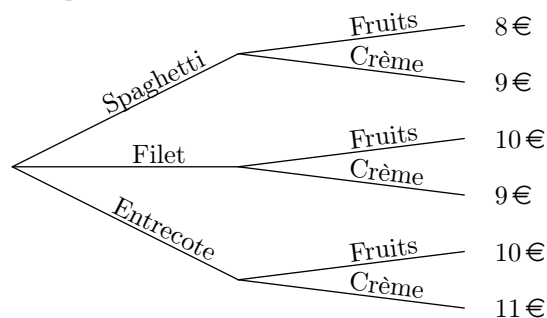
Correction 5180



1. Un client ayant choisi un plat et un dessert aura sa facture comprise entre 8€ et 11€ : toutes les valeurs entre

ces deux extrémums sont également possible.

2. a. Il y a 3 plats au choix et à chacun d'eux, on peut associer deux dessert : on en déduit qu'il y a 6 combinaisons possibles. L'arbre ci-dessous représente les diverses possibilités :



- b. On remarque qu'il n'y a qu'un choix permettant d'obtenir une facture de 8€. Ainsi, la probabilité que le client ait une facture de 8€ est de $\frac{1}{6}$.
Le même raisonnement emmène à donner la probabilité d'obtenir une facture de 11€ est de $\frac{1}{6}$.
- c. Il y a deux choix qui peuvent emmener à une facture de 10€. Ainsi, la probabilité d'obtenir une telle facture est :
 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- d. Voici le tableau complété :

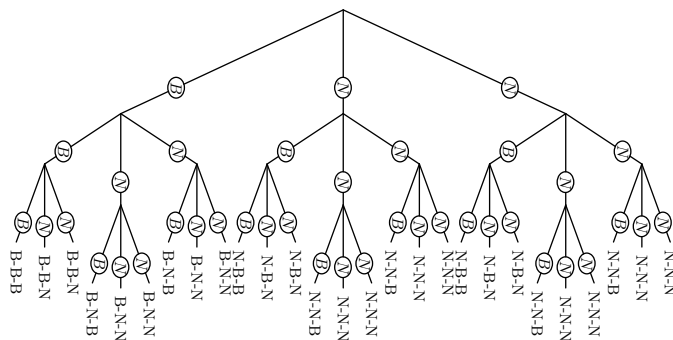
Montant de la facture	8	9	10	11
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Exercice 5181



Dans une urne se trouve trois boules : deux boules noires et une boule blanche. On tire successivement et avec remise trois boules de cette urne.

L'arbre de choix ci-dessous illustre tous les événements élémentaires de cette expérience aléatoire :



On associe à chaque tirage un gain de la manière suivante :

- 0€ si aucune boule noire n'est tirée ;
- 1€ si on a tiré une seule boule noire ;
- 2€ si on a tiré deux boules noires ;
- 5€ si les trois boules sont noires.

Compléter le tableau ci-dessous associant à un gain sa probabilité :

Gain	0	1	2	5
Probabilité				

Correction 5181



Cette arbre de choix comporte 27 branches qui se répartissent ainsi :

- 1 seul chemin ne présente aucune boule noire ;
- 6 chemins présentent une boule noire ;
- 12 chemins présentent deux boules noires ;
- 8 chemins présentent trois boules noires ;

Voici le tableau complété :

Gain	0	1	2	5
Probabilité	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

Exercice 5182



Une urne contient quatre boules bleues numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules vertes numérotées de 1 à 2.

- On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chacune boule le numéro inscrit sur celui-ci.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

- Au tirage d'une boule dans cette urne, on associe les règles de jeu suivantes :

- Si la boule tirée est bleu et porte un nombre pair, le joueur gagne 2€.
- Si la boule tirée n'est pas bleu et porte un nombre pair, le joueur gagne 3€.
- Sinon le joueur ne gagne rien.

On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui associe au tirage d'une boule le gain obtenu.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

Correction 5182



- L'urne contient un total de 9 boules. On a les probabilités suivantes :

- Il y a 3 boules possédant le numéro 1 :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- Il y a 3 boules possédant le numéro 2 :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- Il y a 2 boules possédant le numéro 3 :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = \frac{2}{9}$$

- Il y a 1 boules possédant le numéro 4 :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) = \frac{1}{9}$$

On synthétise ces résultats dans le tableau ci-dessous :

k	1	2	3	4
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- On a les probabilités suivantes :

- Il n'y a que 2 boules bleus dans l'urne possédant un numéro pair :

$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=2) = \frac{2}{9}$$

- Il n'y a que 2 boules non-bleus dans l'urne possédant un numéro pair :

$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=3) = \frac{2}{9}$$

- Ainsi, il reste 5 boules qui ne gagnent rien :

$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=0) = \frac{5}{9}$$

On synthétise ces résultats dans le tableau ci-dessous :

k	0	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=k)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

Exercice 5202



Un jeu consiste à lancer dé dodécaèdre parfaitement équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 12. Le jeu consiste à lancer une fois le dé.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque valeur d'une face le nombre de diviseurs de cette valeur.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Correction 5202



Voici l'ensemble des diviseurs des entiers naturels allant de 1 à 12 :

- 1 possède un diviseur ;
- 2 possède deux diviseurs ;
- 3 possède deux diviseurs ;
- 4 possède trois diviseurs ;
- 5 possède deux diviseurs ;

- 6 possède quatre diviseurs ;

- 7 possède deux diviseurs ;

- 8 possède quatre diviseurs ;

- 9 possède trois diviseurs ;

- 10 possède quatre diviseurs ;

- 11 possède deux diviseurs ;

- 12 possède six diviseurs ;

Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 6\}$.

Il y a :

- 1 face dont le nombre possède un diviseur ;

- 5 faces dont le nombre possède deux diviseurs ;

- 2 faces dont le nombre possède trois diviseurs ;

- 3 faces dont le nombre possède quatre diviseurs ;

- 1 faces dont le nombre possède six diviseurs ;

Comme il y a équiprobabilité entre les faces du dés, on en

déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

x	1	2	3	4	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

7. Espérances et variances :

Exercice 5365



Un jeu consiste à tirer une boule au hasard d'une urne. Le gain du jeu est associé à la couleur de la boule tirée :

- Une boule rouge rapporte 10€.
- Une boule bleu rapporte 1€.
- Une boule verte ne rapporte aucun gain.

1. L'urne A comporte 1 boule rouge, 10 boules bleues et 5 boules vertes.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée au gain d'une boule tirée dans l'urne A .

- a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. L'urne B comporte 3 boule rouge, 3 boules bleues et 20 boules vertes.

On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire associée au gain d'une boule tirée dans l'urne B .

- a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.
- b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

3. Paul souhaite participer au jeu. Quelle est l'urne est la plus avantageuse pour lui ?

Correction 5365



1. a. Les valeurs associées à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ sont 0, 1 et 10. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour loi de probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \frac{5}{16} ; \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \frac{10}{16} ; \mathcal{P}(\mathcal{X}=10) = \frac{1}{16}$$

- b. L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= 0 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + 1 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) + 10 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=10) \\ &= 0 \times \frac{5}{16} + 1 \times \frac{10}{16} + 10 \times \frac{1}{16} \\ &= 0 + \frac{10}{16} + \frac{10}{16} = \frac{20}{16} \simeq 1,25 \end{aligned}$$

2. a. Les valeurs associées à la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ sont 0, 1 et 10. La variable aléatoire $\mathcal{Y}$ a pour loi de probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{Y}=0) = \frac{20}{26} ; \mathcal{P}(\mathcal{Y}=1) = \frac{3}{26} ; \mathcal{P}(\mathcal{Y}=10) = \frac{3}{26}$$

- b. La variable aléatoire $\mathcal{Y}$ a pour espérance :

$$\begin{aligned} E(\mathcal{Y}) &= 0 \times \mathcal{P}(\mathcal{Y}=0) + 1 \times \mathcal{P}(\mathcal{Y}=1) + 10 \times \mathcal{P}(\mathcal{Y}=10) \\ &= 0 \times \frac{20}{26} + 1 \times \frac{3}{26} + 10 \times \frac{3}{26} \\ &= 0 + \frac{3}{26} + \frac{30}{26} = \frac{33}{26} \simeq 1,27 \end{aligned}$$

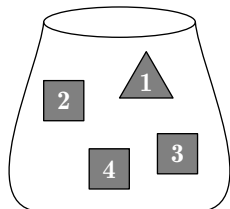
3. L'espérance étant à peine plus grande lorsqu'on tire une boule de l'urne B , Paul doit choisir l'urne B .

8. Répétition d'expériences indépendantes :

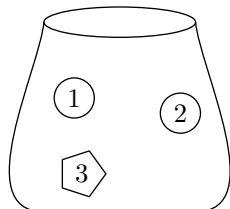
Exercice 5915



On considère deux urnes A et B contenant respectivement quatre et trois objets comme représentés ci-dessous :



Urne A



Urne B

Le jeu consiste à tirer un objet de l'urne A puis de l'urne B :

1. Combien de couples d'objets différents peut-on obtenir à l'issue des deux tirages ?
2. On considère les deux événements suivant :
 - C : "Le couple d'objet comprend un carré"
 - P : "le couple d'objet comprend un pentagone"

Déterminer les probabilités suivantes :

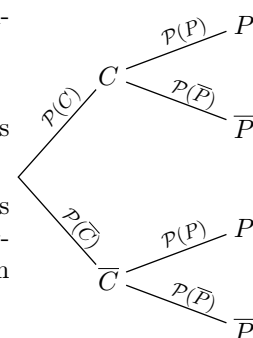
- a. $\mathcal{P}(C \cap P)$
- b. $\mathcal{P}(C \cap \bar{P})$
- c. $\mathcal{P}(\bar{C} \cap P)$
- d. $\mathcal{P}(\bar{C} \cap \bar{P})$

3. a. Déterminer les deux probabilités suivantes :

$$\mathcal{P}(C) ; \mathcal{P}(P)$$

- b. Compléter l'arbre ci-dessous avec les probabilités indiquées :

- c. Peut-on retrouver les résultats de la question 2. à l'aide de l'arbre de probabilité de la question précédente.



Correction 5915



1. On peut obtenir 12 couples distincts d'objets.
2. a. Il y a 3 couples d'objets formés d'un carré et d'un

pentagone.

On en déduit la probabilité :

$$\mathcal{P}(C \cap P) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

- b. Il y a 6 couples d'objets formés d'un carré et d'un cercle.

On en déduit la probabilité :

$$\mathcal{P}(C \cap P) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

- c. Il y a 1 couple d'objets formé d'un triangle et d'un pentagone.

On en déduit la probabilité :

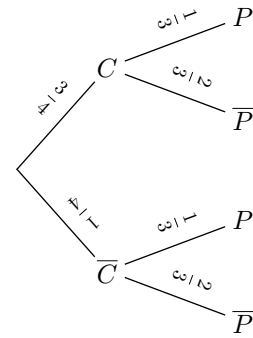
$$\mathcal{P}(\bar{C} \cap P) = \frac{1}{12}$$

- d. Il y a 2 couples d'objets formés d'un triangle et d'un cercle.

On en déduit la probabilité :

$$\mathcal{P}(\bar{C} \cap \bar{P}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

3. a. Voici l'arbre complété :



- b. On retrouve les résultats de la question 2. en remarquant les égalités :

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{P}(C \cap P) &= \mathcal{P}(C) \times \mathcal{P}(P) & \bullet \mathcal{P}(C \cap \bar{P}) &= \mathcal{P}(C) \times \mathcal{P}(\bar{P}) \\ \bullet \mathcal{P}(\bar{C} \cap P) &= \mathcal{P}(\bar{C}) \times \mathcal{P}(P) & \bullet \mathcal{P}(\bar{C} \cap \bar{P}) &= \mathcal{P}(\bar{C}) \times \mathcal{P}(\bar{P}) \end{aligned}$$

9. Répétition et variables :

Exercice 5204



Un QCM (*questionnaire à choix multiple*) est proposé à des élèves : il comporte trois questions et quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.

On souhaite étudier le pourcentage de réussite à ce QCM si les élèves y répondent complètement de réponse aléatoire ; on suppose alors que les réponses données à chacune des questions sont indépendantes entre elles.

On note :

- F_i : "La réponse fournie à la question i est fautive" ;
- V_i : "La réponse fournie à la question i est vraie" ;

1. Compléter l'arbre pondéré présenté ci-dessus.

2. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses fournies au QCM.

- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 5211



Un magasin de sport propose à la location des skis de piste, des snowboards et des skis de randonnée.

Son matériel loué est constitué de 60 % de skis de piste, le reste étant également réparti entre les snowboards et les skis de randonnées.

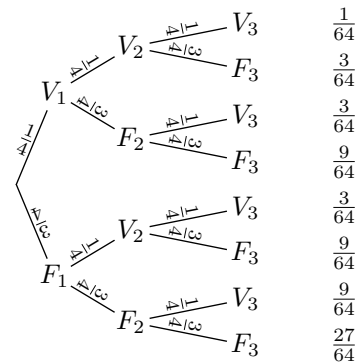
Après la journée de location, le matériel est contrôlé et éventuellement réparé. Indépendamment du type de matériel loué, 30 % du matériel nécessite une réparation.

Chaque paire de ski et chaque snowboard est répertorié sur une fiche qui précise son suivi. On tire au hasard une fiche.

Correction 5204



1. On a l'arbre de probabilité suivante :



2. a. Il peut y avoir 0, 1, 2 ou 3 bonnes réponses par questionnaires. On a la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

- b. On a l'espérance suivante :

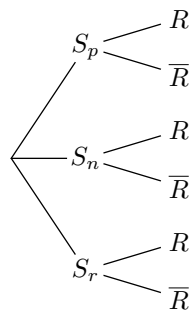
$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= 0 \times \frac{27}{64} + 1 \times \frac{27}{64} + 2 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{1}{64} \\ &= \frac{27}{64} + \frac{18}{64} + \frac{3}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On considère les événements suivants :

- S_p : "La fiche est celle d'une paire de skis de piste" ;
- S_n : "La fiche est celle d'un snowboard" ;
- S_r : "La fiche est celle d'une paire de skis de randonnée" ;
- R : "Le matériel nécessite une réparation" ; $\bar{R}$ est son événement contraire.

Tous les résultats des quatre premières questions seront arrondies à 10^{-3} .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre :



2. a. Calculer la probabilité que la fiche tirée concerne une paire de skis de piste ne nécessitant pas une réparation.

b. Calculer $\mathcal{P}(S_p \cup \bar{R})$: la probabilité que la fiche tirée concerne une paire de skis de piste ou un matériel ne nécessitant pas une réparation.

3. Le coût de la location de skis de piste ou d'un snowboard est de 20 €, celui d'une paire de skis de randonnée est de 15 €.

En cas de réparation, un sur-coût de 15 € est facturé.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à une fiche le montant de la facturation associée.

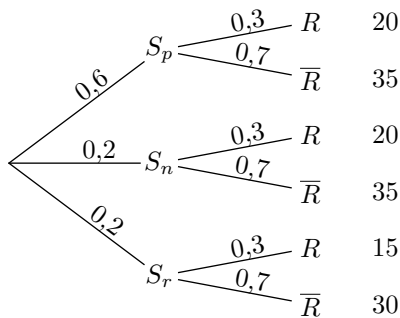
a. Dresser un tableau représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Correction 5211



1. On a l'arbre de probabilité suivante :



Sur la colonne de droite est représentée le prix payé dans chaque cas présenté par cette arbre de choix.

2. a. D'après l'arbre de probabilité, on a :

$$\mathcal{P}(S_p \cap \bar{R}) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$

b. Les événements S_p , $S_n \cap \bar{R}$ et $S_r \cap \bar{R}$ sont disjoints entre eux. On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S_p \cup \bar{R}) &= \mathcal{P}(S_p) + \mathcal{P}(S_n \cap \bar{R}) + \mathcal{P}(S_r \cap \bar{R}) \\ &= 0,6 + 0,2 \times 0,7 + 0,2 \times 0,7 \\ &= 0,6 + 0,14 + 0,14 = 0,88 \end{aligned}$$

3. a. D'après l'arbre de probabilité présenté à la question 1., la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend 4 valeurs distinctes : 15 ; 20 ; 30 ; 35

On a les probabilités suivantes :

$$\bullet \mathcal{P}(\mathcal{X}=15) = \mathcal{P}(S_r \cap R) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$$

$$\bullet \mathcal{P}(\mathcal{X}=20) = \mathcal{P}(S_p \cap R) + \mathcal{P}(S_n \cap R) = 0,6 \times 0,3 + 0,2 \times 0,3 = 0,18 + 0,06 = 0,24$$

$$\bullet \mathcal{P}(\mathcal{X}=30) = \mathcal{P}(S_r \cap \bar{R}) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$$

$$\bullet \mathcal{P}(\mathcal{X}=35) = \mathcal{P}(S_p \cap \bar{R}) + \mathcal{P}(S_n \cap \bar{R}) = 0,6 \times 0,7 + 0,2 \times 0,7 = 0,42 + 0,14 = 0,56$$

En résumé, on obtient le tableau ci-dessous représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	15	20	30	35
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,06	0,24	0,14	0,56

b. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour espérance :

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= 15\mathcal{P}(\mathcal{X}=15) + 20\mathcal{P}(\mathcal{X}=20) + 30\mathcal{P}(\mathcal{X}=30) + 35\mathcal{P}(\mathcal{X}=35) \\ &= 15 \times 0,06 + 20 \times 0,24 + 30 \times 0,14 + 35 \times 0,56 \\ &= 15 \times 0,06 + 20 \times 0,24 + 30 \times 0,14 + 35 \times 0,56 \\ &= 0,9 + 4,8 + 4,2 + 19,6 = 29,5 \end{aligned}$$

10. Qcm A :

Exercice 5905



Un jeu consiste à tirer au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivant :

- A : "La carte est une figure" ;
- B : "La carte est rouge" ;
- C : "La carte a une valeur comprise entre 8 et 10"

1. Quelle est la probabilité de l'évènement C ?

☐ $\frac{12}{32}$ ☐ $\frac{14}{32}$ ☐ $\frac{16}{32}$ ☐ $\frac{18}{32}$

2. Quelle est la probabilité de l'évènement $A \cup B$?

☐ $\frac{16}{32}$ ☐ $\frac{17}{32}$ ☐ $\frac{22}{32}$ ☐ $\frac{23}{32}$

3. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \bar{C}$?

☐ $\frac{3}{32}$ ☐ $\frac{4}{32}$ ☐ $\frac{10}{32}$ ☐ $\frac{12}{32}$

Exercice 5907



On considère une expérience aléatoire représentant une situation d'équiprobabilité. Le schéma ci-dessous représente les

Correction 5905



Un jeu consiste à tirer au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivant :

- A : "La carte est une figure" ;
- B : "La carte est rouge" ;
- C : "La carte a une valeur comprise entre 8 et 10"

1. Quelle est la probabilité de l'évènement C ?

☒ $\frac{12}{32}$ ☐ $\frac{14}{32}$ ☐ $\frac{16}{32}$ ☐ $\frac{18}{32}$

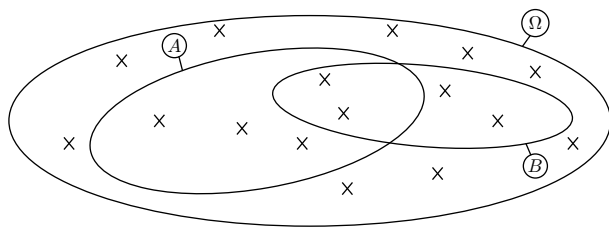
2. Quelle est la probabilité de l'évènement $A \cup B$?

☐ $\frac{16}{32}$ ☐ $\frac{17}{32}$ ☒ $\frac{22}{32}$ ☐ $\frac{23}{32}$

3. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \bar{C}$?

☐ $\frac{3}{32}$ ☐ $\frac{4}{32}$ ☒ $\frac{10}{32}$ ☐ $\frac{12}{32}$

événements élémentaires de l'univers Ω ainsi que les deux événements A et B .



1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap \bar{B}$?

☐ $\frac{2}{16}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{4}{16}$ ☐ $\frac{5}{16}$

2. On considère un évènement C de Ω vérifiant :

$$\mathcal{P}(B \cup C) = \frac{5}{16} \quad ; \quad \mathcal{P}(B \cap C) = \frac{2}{16}$$

Quelle est la probabilité de l'évènement C ?

☐ $\frac{2}{16}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{4}{16}$ ☐ $\frac{5}{16}$

Correction 5907



On considère une expérience aléatoire représentant une situ-

Exercice 5909



On considère un dé truqué à six faces dont le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité :

x	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(x)$	0,14	0,07	0,22	0,12	0,1	

1. Quelle est la probabilité de l'évènement "la face obtenue est la face 6" ?

☐ 0,34 ☐ 0,35 ☐ 0,36 ☐ 0,37

2. On considère les évènements suivants :

- A : "La face obtenue est paire" ;
- B : "La face a une valeur strictement supérieure à 2" ;
- C : "La face a une valeur inférieure ou égale à 5" ;

- a. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

☐ 0,54 ☐ 0,55 ☐ 0,56 ☐ 0,57

- b. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap C$?

☐ 0,42 ☐ 0,44 ☐ 0,46 ☐ 0,48

Exercice 5911



On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- la face "1" rapporte 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- les autres faces ne rapportent rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

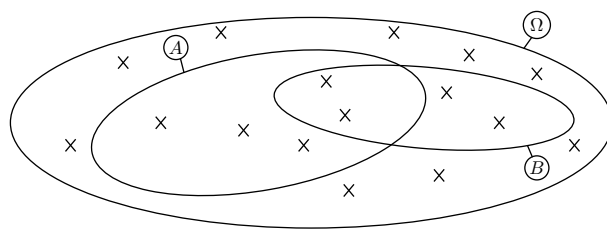
1. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

2. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

ation d'équiprobabilité. Le schéma ci-dessous représente les évènements élémentaires de l'univers Ω ainsi que les deux évènements A et B .



1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap \bar{B}$?

☐ $\frac{2}{16}$ ☒ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{4}{16}$ ☐ $\frac{5}{16}$

2. On considère un évènement C de Ω vérifiant :

$$\mathcal{P}(B \cup C) = \frac{5}{16} \quad ; \quad \mathcal{P}(B \cap C) = \frac{2}{16}$$

Quelle est la probabilité de l'évènement C ?

☐ $\frac{2}{16}$ ☒ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{4}{16}$ ☐ $\frac{5}{16}$

Correction 5909



On considère un dé truqué à six faces dont le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité :

x	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(x)$	0,14	0,07	0,22	0,12	0,1	

1. Quel est la probabilité de l'évènement "la face obtenue est la face 6" ?

☐ 0,34 ☒ 0,35 ☐ 0,36 ☐ 0,37

2. On considère les évènements suivants :

- A : "La face obtenue est pair" ;
- B : "La face a une valeur strictement supérieur à 2" ;
- C : "La face a une valeur inférieure ou égal à 5" ;

- a. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

☒ 0,54 ☐ 0,55 ☐ 0,56 ☐ 0,57

- b. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap C$?

☐ 0,42 ☒ 0,44 ☐ 0,46 ☐ 0,48

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

☐ $\frac{9}{6}$ ☐ $\frac{10}{6}$ ☐ $\frac{11}{6}$ ☐ $\frac{12}{6}$

Correction 5911



On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- la face "1" rapporte 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- les autres faces ne rapportent rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

1. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☒ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

2. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 1)$.

- ☐ $\frac{1}{6}$ ☒ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

Exercice 5913



Une entreprise produit des composants électroniques avant d'être affecté à la vente chaque composant effectue deux tests de qualité indépendant entre eux :

- 5 % des composants échoués au premier test ;
- 3 % des composants échoués au second test.

On choisit, à la sortie de la chaîne de production, un composant électronique de manière aléatoire.

1. Déterminer la probabilité que le composant électronique ait échoué aux deux tests.

- ☐ 0,0012 ☐ 0,0013 ☐ 0,0014 ☐ 0,0015

2. Déterminer la probabilité que le composant électronique ait échoué à un seul des deux tests.

- ☐ 0,0666 ☐ 0,077 ☐ 0,0776 ☐ 0,078

3. Le coût de production se calcule de la manière suivante : chaque composant coûte 100 € et pour chaque test échoué, la réparation coûte 10 €.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chaque composant tiré au hasard son coût de production.

Quelle est la valeur de l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

- ☐ 100,8 ☐ 101,8 ☐ 102,8 ☐ 103,8

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

- ☒ $\frac{9}{6}$ ☐ $\frac{10}{6}$ ☐ $\frac{11}{6}$ ☐ $\frac{12}{6}$

Correction 5913



Une entreprise produit des composants électroniques avant d'être affecté à la vente chaque composant effectue deux tests de qualité indépendant entre eux :

- 5 % des composants échoués au premier test ;
- 3 % des composants échoués au second test.

On choisit, à la sortie de la chaîne de production, un composant électronique de manière aléatoire.

1. Déterminer la probabilité que le composant électronique ait échoué aux deux tests.

- ☐ 0,0012 ☐ 0,0013 ☐ 0,0014 ☒ 0,0015

2. Déterminer la probabilité que le composant électronique ait échoué à un seul des deux tests.

- ☐ 0,0666 ☒ 0,077 ☐ 0,0776 ☐ 0,078

3. Le coût de production se calcule de la manière suivante : chaque composant coûte 100 € et pour chaque test échoué, la réparation coûte 10 €.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chaque composant tiré au hasard son coût de production.

Quelle est la valeur de l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

- ☒ 100,8 ☐ 101,8 ☐ 102,8 ☐ 103,8

11. Qcm B :

Exercice 5906



Un jeu consiste à tirer au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- A : "La carte est une figure" ;
- B : "La carte est un coeur" ;
- C : "La carte a une valeur comprise entre 7 et 10"

1. Quelle est la probabilité de l'événement C ?

- ☐ $\frac{12}{32}$ ☐ $\frac{14}{32}$ ☐ $\frac{16}{32}$ ☐ $\frac{18}{32}$

2. Quelle est la probabilité de l'événement $A \cup B$?

- ☐ $\frac{16}{32}$ ☐ $\frac{17}{32}$ ☐ $\frac{22}{32}$ ☐ $\frac{23}{32}$

3. Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \bar{C}$?

- ☐ $\frac{3}{32}$ ☐ $\frac{4}{32}$ ☐ $\frac{10}{32}$ ☐ $\frac{12}{32}$

Correction 5906



Un jeu consiste à tirer au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- A : "La carte est une figure" ;
- B : "La carte est un coeur" ;
- C : "La carte a une valeur comprise entre 7 et 10"

1. Quelle est la probabilité de l'événement C ?

- ☐ $\frac{12}{32}$ ☐ $\frac{14}{32}$ ☒ $\frac{16}{32}$ ☐ $\frac{18}{32}$

2. Quelle est la probabilité de l'événement $A \cup B$?

- ☐ $\frac{16}{32}$ ☒ $\frac{17}{32}$ ☐ $\frac{22}{32}$ ☐ $\frac{23}{32}$

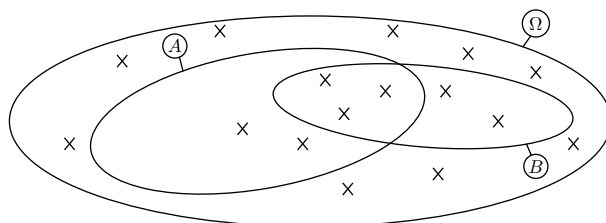
3. Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \bar{C}$?

- ☐ $\frac{3}{32}$ ☒ $\frac{4}{32}$ ☐ $\frac{10}{32}$ ☐ $\frac{12}{32}$

Exercice 5908



On considère une expérience aléatoire représentant une situation d'équiprobabilité. Le schéma ci-dessous représente les événements élémentaires de l'univers Ω ainsi que les deux événements A et B .



1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap \bar{B}$?

☐ $\frac{2}{16}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{4}{16}$ ☐ $\frac{5}{16}$

2. On considère un évènement C de Ω vérifiant :

$$\mathcal{P}(B \cup C) = \frac{7}{16} ; \quad \mathcal{P}(B \cap C) = \frac{2}{16}$$

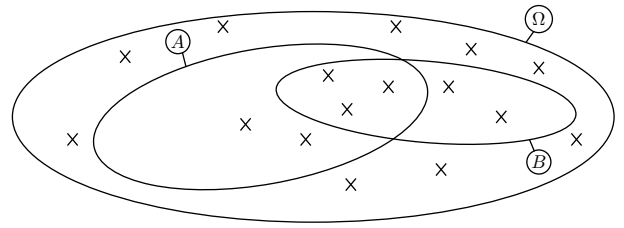
Quelle est la probabilité de l'évènement C ?

☐ $\frac{2}{16}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{4}{16}$ ☐ $\frac{5}{16}$

Correction 5908



On considère une expérience aléatoire représentant une situation d'équiprobabilité. Le schéma ci-dessous représente les évènements élémentaires de l'univers Ω ainsi que les deux évènements A et B .



1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap \bar{B}$?

☒ $\frac{2}{16}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☐ $\frac{4}{16}$ ☐ $\frac{5}{16}$

2. On considère un évènement C de Ω vérifiant :

$$\mathcal{P}(B \cup C) = \frac{7}{16} ; \quad \mathcal{P}(B \cap C) = \frac{2}{16}$$

Quelle est la probabilité de l'évènement C ?

☐ $\frac{2}{16}$ ☐ $\frac{3}{16}$ ☒ $\frac{4}{16}$ ☐ $\frac{5}{16}$

Exercice 5910



On considère un dé truqué à six faces dont le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité :

x	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(x)$	0,14	0,07	0,2	0,12	0,1	

1. Quel est la probabilité de l'évènement "la face obtenue est la face 6"?

☐ 0,34 ☐ 0,35 ☐ 0,36 ☐ 0,37

2. On considère les évènements suivants :

- A : "La face obtenue est pair";
- B : "La face a une valeur strictement supérieur à 2";
- C : "La face a une valeur inférieure ou égal à 5";

- a. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

☐ 0,54 ☐ 0,55 ☐ 0,56 ☐ 0,57

- b. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap C$?

☐ 0,42 ☐ 0,44 ☐ 0,46 ☐ 0,48

Correction 5910



On considère un dé truqué à six faces dont le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité :

x	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(x)$	0,14	0,07	0,2	0,12	0,1	

1. Quel est la probabilité de l'évènement "la face obtenue est la face 6"?

☐ 0,34 ☐ 0,35 ☐ 0,36 ☒ 0,37

2. On considère les évènements suivants :

- A : "La face obtenue est pair";
- B : "La face a une valeur strictement supérieur à 2";
- C : "La face a une valeur inférieure ou égal à 5";

- a. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

☐ 0,54 ☐ 0,55 ☒ 0,56 ☐ 0,57

- b. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap C$?

☒ 0,42 ☐ 0,44 ☐ 0,46 ☐ 0,48

Exercice 5912



On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5€.
- les faces "1" et "3" rapportent 2€.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1€.
- la face "5" ne rapporte rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

1. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

2. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

☐ $\frac{9}{6}$ ☐ $\frac{10}{6}$ ☐ $\frac{11}{6}$ ☐ $\frac{12}{6}$

Correction 5912



On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5€.
- les faces "1" et "3" rapportent 2€.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1€.
- la face "5" ne rapporte rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

1. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☒ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

2. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☒ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

☐ $\frac{9}{6}$ ☐ $\frac{10}{6}$ ☒ $\frac{11}{6}$ ☐ $\frac{12}{6}$

Exercice 5914



Une entreprise produit des composants électroniques avant d'être affecté à la vente chaque composant effectue deux tests de qualité indépendant entre eux :

- 6 % des composants échoués au premier test ;
- 2 % des composants échoués au second test.

On choisit, à la sortie de la chaîne de production, un composant électronique de manière aléatoire.

1. Déterminer la probabilité que le composant électronique ait échoué aux deux tests.

☐ 0,0012 ☐ 0,0013 ☐ 0,0014 ☐ 0,0015

2. Déterminer la probabilité que le composant électronique ait échoué à un seul des deux tests.

☐ 0,0666 ☐ 0,077 ☐ 0,0776 ☐ 0,078

3. Le coût de production se calcule de la manière suivante : chaque composant coûte 100 € et pour chaque test échoué, la réparation coûte 10 €.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chaque composant tiré au hasard son coût de production.

Quelle est la valeur de l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

☐ 100,8 ☐ 101,8 ☐ 102,8 ☐ 103,8

Correction 5914



Une entreprise produit des composants électroniques avant d'être affecté à la vente chaque composant effectue deux tests de qualité indépendant entre eux :

- 6 % des composants échoués au premier test ;
- 2 % des composants échoués au second test.

On choisit, à la sortie de la chaîne de production, un composant électronique de manière aléatoire.

1. Déterminer la probabilité que le composant électronique ait échoué aux deux tests.

☒ 0,0012 ☐ 0,0013 ☐ 0,0014 ☐ 0,0015

2. Déterminer la probabilité que le composant électronique ait échoué à un seul des deux tests.

☐ 0,0666 ☐ 0,077 ☒ 0,0776 ☐ 0,078

3. Le coût de production se calcule de la manière suivante : chaque composant coûte 100 € et pour chaque test échoué, la réparation coûte 10 €.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chaque composant tiré au hasard son coût de production.

Quelle est la valeur de l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

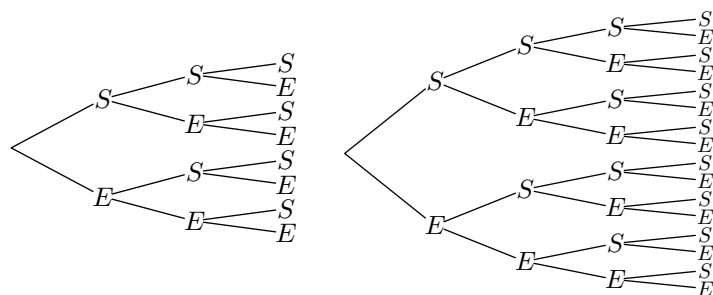
☒ 100,8 ☐ 101,8 ☐ 102,8 ☐ 103,8

13. Coefficients binomiaux :

Exercice 5402



Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :



1. Pour la répétition trois fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues				

2. Pour la répétition quatre fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues					

3. Y a-t-il une méthode pour obtenir le second tableau à partir du premier ?

Correction 5402



1. Voici le tableau précisant le nombre de chemins réalisant

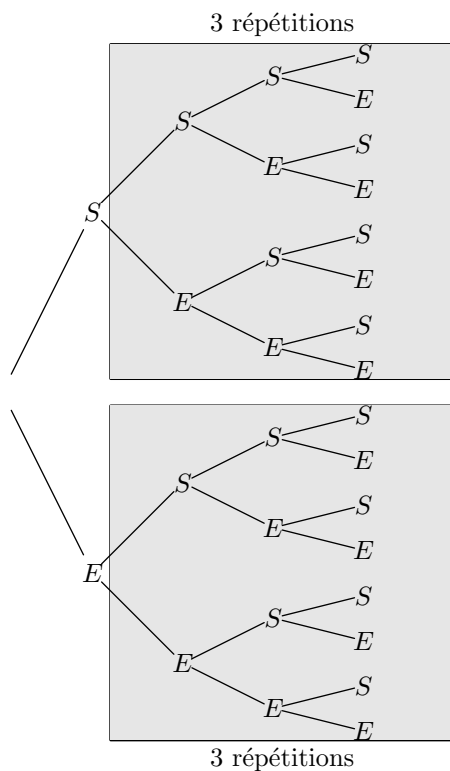
un certain nombre de succès lors de la répétition trois fois de cette épreuve de Bernoulli :

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues	1	3	3	1

2. Voici le tableau présentant le nombre de chemins réalisant un certain nombre de succès lors de la répétition quatre fois de cette épreuve de Bernoulli :

Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues	1	4	6	4	1

3. Pour pouvoir obtenir ce tableau à partir du tableau précédent, il faut observer que le schéma présentant trois répétitions se trouvent présent dans le schéma présentant les quatre répétitions.

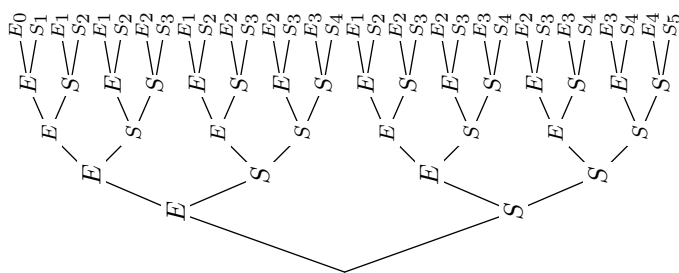


De cette observation, on obtient la relation de récurrence permettant de construire le triangle de Pascal.

Exercice 5217



La figure ci-dessous représente la répétition de cinq épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S (succès) et E (échec). Le nombre en indice sur le cinquième choix représente le nombre de succès réalisés dans le chemin choisi.



1. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés						

2. On considère la même épreuve de Bernoulli mais répétée six fois :

- a. Donner le nombre de chemins réalisant 4 succès lorsque l'on répète six fois une épreuve de Bernoulli (on pourra compléter l'arbre de choix ou raisonner).
- b. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés							

Correction 5217



1. L'arbre de choix présenté permet de compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés	1	5	10	10	5	1

2. a. Pour obtenir 4 succès au bout de six répétitions, il faut :
 - Soit obtenir 3 succès au bout de cinq répétitions et obtenir un succès lors de la sixième répétition. On compte 10 possibilités grâce à l'arbre précédent.
 - Soit obtenir 4 succès au bout de cinq répétitions et obtenir un échec lors de la sixième répétition. On compte 5 possibilités grâce à l'arbre précédent. On en déduit qu'il existe 15 chemins possibles réalisant 4 succès lors de la répétition de six épreuves de Bernoulli.
- b. En raisonnant de la manière précédente, on complète le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés	1	6	15	20	15	6	1

14. Loi binomiale :

Exercice 4209

Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0; 1[$.

Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

• **Proposition 1** : si $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = 8 \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ alors $p = \frac{2}{3}$.

• **Proposition 2** : si $p = \frac{1}{5}$ alors $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$.

Correction 4209

La variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètre 4 et p . On a pour tout entier k compris entre 0 et 4 :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k) = \binom{4}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{4-k}$$

• Considérons l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = 8 \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$$

$$\binom{4}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^3 = 8 \times \binom{4}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^4$$

$$4 \times p \cdot (1-p)^3 = 8 \times (1-p)^4$$

$$p \cdot (1-p)^3 = 2 \times (1-p)^4$$

$p \neq 1$, on peut diviser les deux membres par $(1-p)^3$:

$$p = 2 \times (1-p)$$

$$p = 2 - 2p$$

$$p + 2p = 2$$

$$3p = 2$$

$$p = \frac{2}{3}$$

On en déduit que la **proposition 1** est vérifiée.

• Supposons que $p = \frac{1}{5}$. On a :

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \binom{4}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^3 = 4 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \binom{4}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^4 = 1 \times 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

On en déduit l'égalité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$

La **proposition 2** est également vérifiée.

15. Loi binomiale - problème :

Exercice 5503

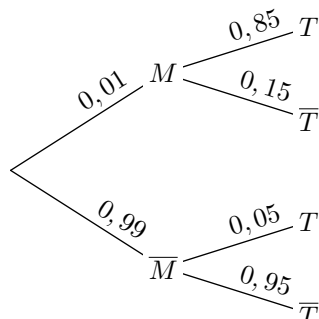
Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux.

On note les événements :

• M : "l'animal est porteur de la maladie" ;

• T : "le test est positif".

Voici l'arbre de probabilité obtenu après l'étude du cheptail :



1. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

2. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millièmes près.

3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z associant à un animal le coût à engager.

b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Correction 5503

1. a. La probabilité qu'un animal choisi au hasard soit

porteur de la maladie et que son test soit positif a pour valeur :

$$\mathcal{P}(M \cap T) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$$

- b. L'évènement " T : le test est positif" peut se décomposer par la réunion suivante :

$$T = (M \cap T) \cup (\overline{M} \cap T) \cup (\overline{M} \cap \overline{T})$$

Ces ensembles étant disjoints deux à deux, on en déduit la probabilité :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(T) &= \mathcal{P}(M \cap T) + \mathcal{P}(\overline{M} \cap T) \\ &= 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,05 = 0,0085 + 0,0495 \\ &= 0,058\end{aligned}$$

2. a. La probabilité, en tirant un animal au hasard, d'avoir un test positif est de 0,058. L'énoncé précise que la répétition du tirage des animaux s'assimile à des tirages avec remise.

On en déduit que la variable $\mathcal{X}$ comptant le nombre d'animaux ayant un test positif suit une loi binomiale

de paramètre 5 et 0,058 :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(5; 0,058)$$

- b. La probabilité qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif a pour valeur :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 0) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0)$$

$$= 1 - \binom{5}{0} \times 0,058^0 \times (1 - 0,058)^5$$

$$= 1 - 1 \times 1 \times 0,942^5 \simeq 0,258$$

3. a. En notant $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire associant à chaque animal le coût du soin à associer a pour espérance :
 $E(\mathcal{Z}) = 0 \times \mathcal{P}(\mathcal{Z} = 0) + 100 \times \mathcal{P}(\mathcal{Z} = 100) + 1000 \times \mathcal{P}(\mathcal{Z} = 1000)$
 $= 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 = 7,3$

- b. Ainsi, en possédant un troupeau de 200 bêtes, l'éleveur doit préparer la somme de :

$$E(\mathcal{Y}) = 200 \times 7,3 = 1460 \text{€}.$$

Exercice 4211



On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A , B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot " $BBAAC$ " signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

- Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
- On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

- E : "le candidat a exactement une réponse exacte".
- F : "le candidat n'a aucune réponse exacte".
- G : "le mot-réponse du candidat est un palindrome".
 (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, " $BACAB$ " est un palindrome)

Correction 4211



- Le choix des réponses dans ce questionnaire correspond à un tirage avec remise à cinq tirages à trois choix.

Ainsi, le nombre de réponses possibles sont au nombre de :

$$3^5 = 243$$

- Répondant au hasard aux questions, la probabilité de répondre correctement à une réponse est de :

$$\frac{1}{3}$$

C'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Répétant cela, de manière indépendante, sur les cinq questions, on est en face d'un schéma de cinq épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Notons X la variable aléatoire associant à chaque expérience, le nombre de bonnes réponses. La variable $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $(5; \frac{1}{3})$.

Ainsi, on a les probabilités suivantes :

$$\text{a. } \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\mathcal{X} = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= 3 \times \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\text{b. } \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

- Pour créer un tel palindrome, il suffit de choisir les trois premières lettres : les deux dernières sont alors imposées par les deux premières.

Ainsi, le nombre de palindromes dépend du nombre de possibilités sur les trois premières lettres :

$$3^3$$

Ainsi, on a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(G) = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

16. Espérance d'une loi binomiale :

Exercice 4226



On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

- Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?
- Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millièème de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X} = 2)$.
- Donner l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Correction 4226

1. La probabilité d'obtenir la face 6 est de $\frac{1}{6}$ car on utilise un dé équilibré.

En lançant le dé trois fois de suite, on est dans le cas de la répétition d'une épreuve de Bernoulli.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre d'appartenance de la face 6, elle suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{6}$: $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$

2. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale, on obtient la valeur de la probabilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{X}=2) &= \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{72} \simeq 0,0694 \end{aligned}$$

3. Les propriétés des variables aléatoires suivant une loi binomiale permettent d'obtenir directement l'espérance de celle-ci :

$$E(\mathcal{X}) = n \times p = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Exercice 4273

Une usine produit des sacs. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement "au moins un sac est défectueux" ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

spond à la répétition cent fois d'une épreuve de Bernoulli.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ compte le nombre de sacs défectueux sur le prélèvement : la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 100 et 0,03.

On a : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(100; 0,03)$

2. L'évènement "au moins un sac est défectueux" est caractérisée par des valeurs de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ supérieure ou égale à 1. Ainsi, la probabilité recherchée est $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1)$.

Par complémentarité, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1) &= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0) \\ &= 1 - \binom{100}{0} \times 0,03^0 \times 0,97^{100} = 1 - 0,97^{100} \simeq 0,95 \end{aligned}$$

Cela signifie que sur un lot de 100 sacs, il y a 95 % de chances d'avoir au moins un sac qui soit défectueux.

3. Les propriétés des variables aléatoires suivant une loi binomiale permettent d'obtenir directement l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

$$E(\mathcal{X}) = n \times p = 100 \times 0,03 = 3$$

Ainsi, par prélèvement de 100 sachets, en moyenne on trouvera 3 sachets défectueux.

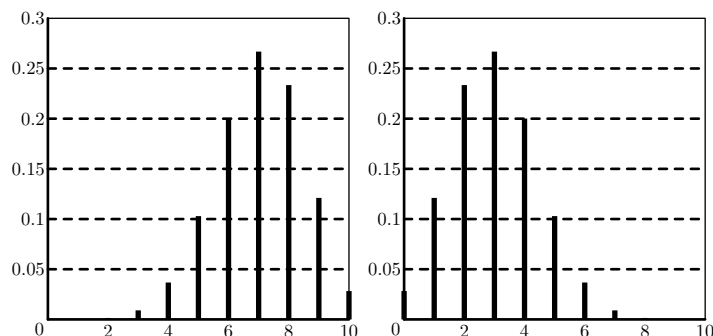
Correction 4273

1. On assimile le prélèvement d'un sac à un tirage successif avec un remise. Ainsi, le prélèvement de 100 sacs corre-

17. Répartition de la distribution :

Exercice 5443

Des deux représentations ci-dessous, laquelle représente une loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p=0,3$:

**Correction 5443**

Une loi binomiale de paramètre 10 et 0,3 est la représentation d'une répétition dix fois d'une épreuve de Bernoulli où le succès a une probabilité de 0,3.

Ainsi, par complémentarité, l'échec a une probabilité de 0,7.

On en déduit que cette répétition aura tendance à favoriser un nombre important d'échec. Sur ce constat, la représentation doit être celle de droite.

18. Intervalle de confiance et de fluctuation :

Exercice 5450

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,3 :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(9; 0,3)$$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	0,04	0,196	0,463	0,73	0,901	0,975	0,996	1,0	1,0	1,0

Exercice 5449

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,5 :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(9; 0,5)$$

Les deux tableaux ci-dessous donnent des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	0,002	0,02	0,09	0,254	0,5	0,746	0,91	0,98	0,998	1,0

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k) > 0,025$?
2. Pour quelles valeurs de k a-t-on $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k) \geq 0,975$?
3. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[2; 7]$.

Correction 5449

1. D'après le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, pour toute valeur de k appartenant à l'ensemble $[2; 9]$ vérifie :
 $k \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \implies \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k) > 0,025$
2. D'après le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, pour toute valeur de k appartenant à

Exercice 5451

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 30 et 0,32 : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(30; 0,32)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	0	0	0,001	0,005	0,018	0,049	0,11	0,208	0,341

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	0,494	0,645	0,774	0,871	0,934	0,97	0,988	0,995	0,999

k	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) > 0,025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq b) \geq 0,975$
2. Justifier que $\mathcal{P}(a \leq \mathcal{X} \leq b) \geq 0,95$
3. En notant $F = \frac{\mathcal{X}}{30}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence aléatoire du succès. Justifier que :
 $\mathcal{P}\left(\frac{a}{30} \leq F \leq \frac{b}{30}\right) \geq 0,95$

Correction 5451

1. D'après le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, on en déduit que la plus petite

Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0; 5]$.

Correction 5450

D'après le tableau précédent, on a la probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 5) \simeq 0,975$$

Ainsi, la probabilité à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0; 5]$ est supérieure à 97 %, validant ainsi l'assertion de l'énoncé.

l'ensemble $[2; 9]$ vérifie :

$$k \in \{7; 8; 9\} \implies \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k) \geq 0,975$$

3. Les deux ensembles $\{0 \leq \mathcal{X} \leq 1\}$ et $\{2 \leq \mathcal{X} \leq 7\}$ étant disjoints, on en déduit l'égalité :

$$\mathcal{P}(\{0 \leq \mathcal{X} \leq 1\} \cup \{2 \leq \mathcal{X} \leq 7\}) = \mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 1) + \mathcal{P}(2 \leq \mathcal{X} \leq 7)$$

$$\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 7) = \mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 1) + \mathcal{P}(2 \leq \mathcal{X} \leq 7)$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 7) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) + \mathcal{P}(2 \leq \mathcal{X} \leq 7)$$

$$\mathcal{P}(2 \leq \mathcal{X} \leq 7) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 7) - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1)$$

Puisque l'entier 1 ne vérifie pas la condition imposée par la question 1., on en déduit :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) \leq 0,025$$

$$-\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) \geq -0,025$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 7) - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) \geq \mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 7) - 0,025$$

D'après les résultats de la question 2. :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 7) - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) \geq 0,975 - 0,025$$

$$\mathcal{P}(2 \leq \mathcal{X} \leq 7) \geq 0,95$$

Ainsi, la probabilité que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prenne ses valeurs dans l'intervalle $[2; 7]$ est supérieure ou égale à 95 %

valeur de a vérifiant l'inégalité $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) > 0,025$ a pour valeur :

$$a = 5$$

- Le plus petit entier b réalisant l'inégalité $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq b) \geq 0,975$ a pour valeur $b = 15$

2. 4 ne vérifiant l'inégalité $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) > 0,025$, on en déduit l'inégalité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 4) \leq 0,025$$

$$-\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 4) \geq -0,025$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 15) - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 4) \geq 0,975 - 0,025$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 15) - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 4) \geq 0,95$$

$$\mathcal{P}(5 \leq \mathcal{X} \leq 15) \geq 0,95$$

3. On a l'équivalence des encadrements suivants :

$$\frac{a}{30} \leq F \leq \frac{b}{30}$$

$$30 \times \frac{a}{30} \leq 30 \times F \leq 30 \times \frac{b}{30}$$

$$a \leq \mathcal{X} \leq b$$

On en déduit l'égalité des deux ensembles suivants :

$$\left\{ \omega \in \Omega \mid a \leq \mathcal{X}(\omega) \leq b \right\} = \left\{ \omega \in \Omega \mid \frac{a}{30} \leq F \leq \frac{b}{30} \right\}$$

Ainsi, on obtient la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}\left(\frac{a}{30} \leq F \leq \frac{b}{30}\right) \geq 0,95.$$

Exercice 5453

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et 0,81.

k	71	72	73	74	75	76	77	78	79
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	0,010	0,018	0,032	0,053	0,084	0,127	0,185	0,257	0,343

k	80	81	82	83	84	85	86	87	88
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	0,439	0,540	0,640	0,733	0,813	0,877	0,924	0,957	0,977

Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 %.

Exercice 5460

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre 20 et 0,34 : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(20; 0,34)$

On répondra aux questions sans justifier et à l'aide de la calculatrice.

- Déterminer les deux plus petits entiers a et b vérifiant les inégalités :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) > 0,025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq b) \geq 0,975$
- Déterminer l'intervalle de fluctuation J au seuil de 95 %

Correction 5460**Exercice 5461**

Une société affirme que 80 % de ses clients sont satisfaits par ses produits.

- Une association de consommateurs souhaite vérifier cette allégation et commande une étude portant sur 50 clients de cette société.
 - Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
 - L'étude obtient un taux de satisfaction de 71 %. Selon cette étude, que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 % ?
- L'association renouvelle son étude qui porte cette fois sur 100 clients. Cette nouvelle étude obtient toujours un taux de satisfaction de 71 %.
Que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %.

Correction 5461

- Après avoir saisi les informations relatives à une variable aléatoire suivant une loi binomiale, on obtient les deux captures d'écran suivantes :

Correction 5453

Le plus petit entier a vérifiant $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) > 0,025$ est $a=73$.

Le plus petit entier b vérifiant $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq b) \geq 0,975$ est $b=88$.

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est :

$$I = [73; 88].$$

Cette expérience s'effectuant sur la répétition 100 fois d'une même épreuve de Bernoulli, alors la fréquence d'apparition du succès a pour intervalle de fluctuation :

$$J = [0,73; 0,88]$$

- Après avoir saisi les informations nécessaires, la calculatrice affiche la valeur des probabilités cumulées pour une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi de probabilité 20 et 0,34 :

SUB	List 1	List 2	List 3	List 4
3	2	0.0151		
4	3	0.0535		
5	4	0.1374		
6	5	0.2758		
		0.05351687118		

SUB	List 1	List 2	List 3	List 4
10	9	0.8968		
11	10	0.9566		
12	11	0.9806		
13	12	0.9954		
		0.9846462373		

- Ainsi, la variable $\mathcal{X}$ admet l'intervalle J ci-dessous comme intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :

$$J = \left[\frac{3}{20}; \frac{11}{20} \right] = [0,15; 0,55]$$

L1	L2	L3	2
32	.00626		
33	.01444		
34	.02807		
35	.04672		
36	.07059		
37	.09966		
38	.13493		
	L2(35)=.030803422...		

L1	L2	L3	2
42	.80959		
43	.89666		
44	.95197		
45	.98063		
46	.99434		
47	.99967		
48	.99981		
	L2(46)=.981503984...		

Ainsi, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[\frac{34}{50}; \frac{45}{50} \right] = [0,68; 0,9]$$

- La fréquence de 0,71 obtenue par cette étude rend dans le cadre du modèle théorique au seuil de 5 %.
- On a les deux captures d'écran suivantes :

L1	L2	L3	2
69	.00606		
70	.01125		
71	.02002		
72	.03273		
73	.04983		
74	.07148		
75	.10000		
	L2(73)=.034151630...		

L1	L2	L3	2
84	.87149		
85	.91956		
86	.95309		
87	.97462		
88	.98743		
89	.9943		
90	.99767		
	L2(89)=.987425123...		

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est alors :

$$J' = \left[\frac{72}{100}; \frac{88}{100} \right] = [0,72; 0,88].$$

Ainsi, cette étude doit être rejetée avec un seuil d'erreur de 5 %.

Exercice 5464

On considère un jeu utilisant deux urnes contenant des boules de couleurs rouges et bleues indiscernables au toucher. On suppose les tirages dans les deux urnes indépendants l'un de l'autre. Voici la composition de chacune des urnes :

- L'urne A est composée de trois boules rouges et de deux boules bleues ;
- L'urne B est composée de 12 boules rouges et de 28 boules bleues.

Chaque participant doit retirer une boule dans l'urne A , puis une boule dans l'urne B .

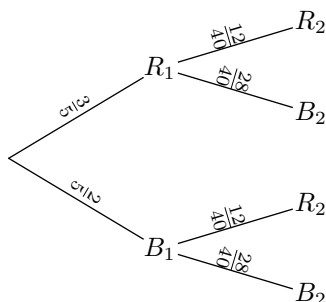
- Construire un arbre de probabilité représentant ce jeu.
 - Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge a pour valeur $\frac{18}{25}$
- On répète 20 fois ce jeu de manière indépendante. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui compte le nombre de jeu où au moins une boule rouge a été tirée.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$?
- b. Déterminer la probabilité de $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 18)$. Puis, donner la valeur approchée au millièm de cette probabilité.
3. a. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % de la loi binomiale d'une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et $\frac{18}{25}$.
- b. Une étude statistique a portée sur la répétition 100 fois de ce jeu. La fréquence d'appartenance de l'évènement "au moins une boule rouge a été obtenue" a été de 0,55. Doit-on rejeter cette étude avec un risque de 5 % ?

Correction 5464



1. a. Voici l'arbre de probabilité demandée :



- b. Les deux évènements R_1 et $B_1 \cap R_2$ étant disjoints, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[R_1 \cup (B_1 \cap R_2)] &= \mathcal{P}(R_1) + \mathcal{P}(B_1 \cap R_2) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{12}{40} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{12}{40} = \frac{15}{25} + \frac{2 \times 12}{5 \times 40} \\ &= \frac{15}{25} + \frac{3 \times 8}{25 \times 8} = \frac{15}{25} + \frac{3}{25} = \frac{18}{25} \end{aligned}$$

2. a. La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge

Exercice 5504



On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et 0,35 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(100; 0,35)$).

Les questions suivantes sont à traiter à l'aide de la calculatrice et les résultats doivent être donnés, si nécessaire, au millièm près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=43)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 38)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 31)$

2. a. Déterminer la valeur des plus petits entiers a et b vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) > 0,025 \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq b) \geq 0,975$$

- b. Donner l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Correction 5504



est de $\frac{18}{25}$. On répète 20 fois cette expérience aléatoire de manière aléatoire de manière indépendante. Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de fois qu'au moins une boule rouge a été tirée suit une loi binomiale de paramètre 20 et $\frac{18}{25}$. On a :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(20; \frac{18}{25}\right)$$

- b. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 20 et $\frac{18}{25}$, on a :

$$\bullet \mathcal{P}(\mathcal{X}=18) = \binom{20}{18} \times \left(\frac{18}{25}\right)^{18} \times \left(\frac{7}{25}\right)^2 \simeq 0,040$$

$$\bullet \mathcal{P}(\mathcal{X}=19) = \binom{20}{19} \times \left(\frac{18}{25}\right)^{19} \times \left(\frac{7}{25}\right)^1 \simeq 0,011$$

$$\bullet \mathcal{P}(\mathcal{X}=20) = \binom{20}{20} \times \left(\frac{18}{25}\right)^{20} \times \left(\frac{7}{25}\right)^0 \simeq 0,001$$

On en déduit la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 18) &= \mathcal{P}(\mathcal{X}=18) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=19) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=20) \\ &\simeq 0,040 + 0,011 + 0,001 = 0,052 \end{aligned}$$

3. a. On a les deux captures d'écran des probabilités cumulées croissantes associées à une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et $\frac{18}{25}$:

	LiSt 1	LiSt 2	LiSt 3	LiSt 4
SUB				
62	61	0.0113		
63	62	0.0192		
64	63	0.0315		
65	64	0.0499		
		0.03158983296		

	LiSt 1	LiSt 2	LiSt 3	LiSt 4
SUB				
80	79	0.9559		
81	80	0.9741		
82	81	0.9856		
83	82	0.9925		
		0.985633365		

On en déduit l'intervalle I de fluctuation :

$$I = \left[\frac{64}{100}; \frac{82}{100} \right] = [0,64; 0,82]$$

- b. Cette étude sera rejetée au seuil de 5 % d'erreurs.

1. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=43) \simeq 0,021$

- b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 38) \simeq 0,770$

- c. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 31) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 31) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 30)$
 $= 1 - 0,173 = 0,827$

2. a. A l'aide de la calculatrice, on a :

- 26 est le plus petit entier naturel a vérifiant l'inégalité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) > 0,025$$

- 44 est le plus petit entier naturel b vérifiant l'inégalité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq b) \geq 0,975$$

- b. Ainsi, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ est :

$$I = \left[\frac{26}{100}; \frac{44}{100} \right] = [0,26; 0,44].$$

Exercice 3197



Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes ($0 \leq n \leq 10$). Les boules sont indiscernables au toucher.

- Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- R : "La boule tirée est rouge" ;
- B : "la boule tirée est blanche" ;
- V : "la boule tirée est verte".

- Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.

Le joueur tire une boule de l'urne :

- Si elle est rouge, il gagne $16 F$;
 - Si elle est blanche, il perd $12 F$;
 - Si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
- ➡ Si cette boule est rouge, il gagne $8 F$;
- ➡ Si cette boule est blanche, il perd $2 F$;
- ➡ Si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants. Au début de la partie, le joueur possède $12 F$. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas).

- Déterminer les valeurs prises par $\mathcal{X}$.
- Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
- Montrer que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 12 + 16 \cdot \frac{n}{(n+7)^2}.$$

- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$. Étudier les variations de f .

- En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique $\mathcal{X}$ est maximale. Calculer cette valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

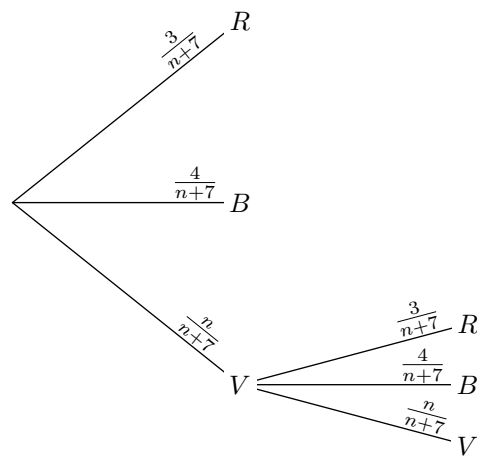
Correction 3197



- Au total, l'urne contient $n+7$ boules. On en déduit les probabilités suivantes :

$$\text{a. } \mathcal{P}(R) = \frac{3}{n+7} \quad \text{b. } \frac{4}{n+7} \quad \text{c. } \frac{n}{n+7}$$

- Les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathcal{X}$ appartiennent à l'ensemble :
 $\{0; 10; 12; 20; 28\}$
 - L'arbre de probabilité ci-dessous modélise ce jeu :



On en déduit la loi de probabilité suivante :

k	0	10	12	20	28
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{4}{n+7}$	$\frac{4n}{(n+7)^2}$	$\left(\frac{n}{n+7}\right)^2$	$\frac{3n}{(n+7)^2}$	$\frac{3}{n+7}$

- L'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 0 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + 10 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=10) + 12 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=12) + 20 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=20) + 28 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=28)$$

$$\begin{aligned} &= 10 \times \frac{4n}{(n+7)^2} + 12 \times \frac{n^2}{(n+7)^2} \\ &\quad + 20 \times \frac{3n}{(n+7)^2} + 28 \times \frac{3}{n+7} \\ &= \frac{40n + 12n^2 + 60n + 28 \times 3(n+7)}{(n+7)^2} \\ &= \frac{40n + 12n^2 + 60n + 84n + 588}{(n+7)^2} = \frac{12n^2 + 184n + 588}{(n+7)^2} \\ &= \frac{12n^2 + 168n + 588 + 16n}{(n+7)^2} = \frac{12(n^2 + 14n + 49) + 16n}{(n+7)^2} \\ &= \frac{12(n+7)^2 + 16n}{(n+7)^2} = \frac{12(n+7)^2}{(n+7)^2} + \frac{16n}{(n+7)^2} \\ &= 12 + 16 \cdot \frac{n}{(n+7)^2} \end{aligned}$$

- La fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = (x+7)^2$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2x + 14$$

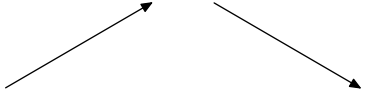
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{1 \times (x+7)^2 - x \times (2x+14)}{[(x+7)^2]^2} \\ &= \frac{x^2 + 14x + 49 - 2x^2 - 14x}{(x+7)^4} = \frac{-x^2 + 49}{(x+7)^4} \\ &= \frac{49 - x^2}{(x+7)^4} = \frac{(7+x)(7-x)}{(x+7)^4} = \frac{7-x}{(x+7)^3} \end{aligned}$$

Le dénominateur de ce quotient est strictement positif sur $[0; 10]$. En étudiant le numérateur, on obtient le tableau de signe de la fonction f' :

x	0	7	10
$7-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

La fonction f admet le tableau de variation suivant :

x	0	7	10
Variation de f			

4. De l'étude de la fonction f , on en déduit que l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ est maximale lorsque n prend la valeur 7.

Pour $n=7$, l'espérance aura pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 12 + 16 \times \frac{7}{(7+7)^2} = 12 + 16 \times \frac{7}{14^2} \\ = 12 + \frac{4}{7} = \frac{88}{7}$$

20. Probabilité et suites :

Exercice 3223



On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A , B et C . A l'instant 0, la puce est en A . Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A , alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
 Soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
 Soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- Si à l'instant n la puce est en B , alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
soit en C , soit en A de façon équiprobable.
- Si à l'instant n la puce est en C , alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n , C_n) l'événement "à l'instant n la puce est en A " (respectivement en B , en C).

On note a_n (respectivement b_n , c_n) la probabilité de l'évènement A_n , (respectivement B_n , C_n)

On a donc :

$$a_0 = 1 \quad ; \quad b_0 = c_0 = 0$$

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k , b_k et c_k pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq 3$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n \end{cases}$$

- b. Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$

- c. En déduire que, pour tout entier naturel p :

$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$

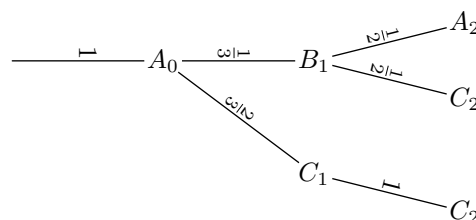
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Correction 3223



1. Voici l'arbre de probabilité représentant les trois premiers mouvements de la puce :



Voici les valeurs recherchées :

- Pour $k=0$: $a_0 = 1$; $b_0 = 0$; $c_0 = 0$
- Pour $k=1$: $a_1 = 0$; $b_1 = \frac{1}{3}$; $c_1 = \frac{2}{3}$
- Pour $k=2$:

$$\begin{array}{c|c|c} a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} & b_2 = 0 & c_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times 1 \\ = \frac{1}{6} & & = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \\ & & = \frac{5}{6} \end{array}$$

2. a. Pour tout entier naturel n , les événements A_n , B_n et C_n forment une partition de l'univers. On en déduit :
 $a_n + b_n + c_n = 1$.

- La seule manière d'arriver en B est de venir de A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Ainsi, on a :

$$b_{n+1} = \mathcal{P}(B_{n+1}) = \mathcal{P}(A_n) \cdot \mathcal{P}_{A_n}(B_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{3}$$

- La seule manière d'arriver en A est d'être sur le point B et de se déplacer vers A avec une probabilité de $\frac{1}{2}$:

$$a_{n+1} = \mathcal{P}(A_{n+1}) = \mathcal{P}(B_n) \cdot \mathcal{P}_{B_n}(A_{n+1}) = b_n \times \frac{1}{2}$$

- b. D'après la question précédente, on a les égalités :

$$a_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a_n\right) = \frac{1}{6} \cdot a_n$$

- c. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$\mathcal{P}_n : \begin{cases} a_{2n} = \left(\frac{1}{6}\right)^n & \text{et} & a_{2n+1} = 0 \\ b_{2n} = 0 & \text{et} & b_{2n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{cases}$$

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

● **Initialisation :**

D'après la question 1., on a :

$$a_0 = 1 \quad ; \quad a_1 = 0 \quad ; \quad b_0 = 0 \quad ; \quad b_1 = \frac{1}{3}$$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

● **Hérédité :**

Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{cases} a_{2n} = \left(\frac{1}{6}\right)^n & \text{et} & a_{2n+1} = 0 \\ b_{2n} = 0 & \text{et} & b_{2n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{2 \cdot (n+1)} = a_{2n+2} = \mathcal{P}(A_{2n+2})$$

On arrive au point A qu'en venant de B :

$$\begin{aligned} &= \mathcal{P}(B_{2n+1}) \cdot \mathcal{P}_{B_{2n+1}}(A_{2n+2}) \\ &= b_{2n+1} \cdot \mathcal{P}_{B_{2n+1}}(A_{2n+2}) \\ &= b_{2n+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_{2(n+1)} = b_{2n+2} = \mathcal{P}(B_{2n+2})$$

On arrive au point B qu'en venant de A :

$$\begin{aligned} &= \mathcal{P}(A_{2n+1}) \cdot \mathcal{P}_{A_{2n+1}}(B_{2n+2}) \\ &= 0 \cdot \mathcal{P}_{A_{2n+1}}(B_{2n+2}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{2 \cdot (n+1)+1} = a_{2n+3} = \mathcal{P}(A_{2n+3})$$

On arrive au point A qu'en venant de B :

$$\begin{aligned} &= \mathcal{P}(B_{2n+2}) \cdot \mathcal{P}_{B_{2n+2}}(A_{2n+3}) \\ &= b_{2n+2} \cdot \mathcal{P}_{B_{2n+2}}(A_{2n+3}) \\ &= 0 \cdot \mathcal{P}_{B_{2n+2}}(A_{2n+3}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_{2(n+1)+1} = b_{2n+3} = \mathcal{P}(B_{2n+3})$$

On arrive au point B qu'en venant de A :

$$\begin{aligned} &= \mathcal{P}(A_{2n+2}) \cdot \mathcal{P}_{A_{2n+2}}(B_{2n+3}) \\ &= a_{2n+2} \cdot \frac{1}{3} = a_{2(n+1)} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

● **Conclusion :**

La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

3. De la comparaison $0 \leq \frac{1}{6} < 1$, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$$

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 0$

Or, pour tout entier n , on a l'égalité : $a_{2n+1} = 0$

On en déduit la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Pour tout entier naturel n , on a l'égalité :

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 + 0 + c_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$$

On en déduit que pour une valeur élevée de déplacement que l'évènement "la puce est en C" est un évènement certain.

Exercice 4378



Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement "le joueur gagne la n -ième partie" ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc : $p_1 = 0,1$

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot p_n + \frac{3}{5}$$

5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

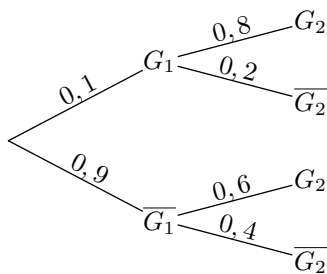
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :

$$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} ?$$

Correction 4378



1. Voici l'arbre pondéré relié à cette situation :



Par définition, on a :

$$p_2 = \mathcal{P}(G_2)$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} &= \mathcal{P}(G_1 \cap G_2) + \mathcal{P}(\overline{G_1} \cap G_2) \\ &= \mathcal{P}(G_1) \times \mathcal{P}_{G_1}(G_2) + \mathcal{P}_{\overline{G_1}}(G_2) \\ &= 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62 \end{aligned}$$

2. On demande de calculer la probabilité $\mathcal{P}_{G_2}(\overline{G_1})$. Par définition des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{G_2}(\overline{G_1}) &= \frac{\mathcal{P}(G_2 \cap \overline{G_1})}{\mathcal{P}(G_2)} = \frac{\mathcal{P}(\overline{G_1}) \times \mathcal{P}_{\overline{G_1}}(G_2)}{\mathcal{P}(G_2)} \\ &= \frac{0,9 \times 0,6}{0,62} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{54}{62} = \frac{27}{31} \end{aligned}$$

3. Déterminons la probabilité qu'il perde les trois premières parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) &= \mathcal{P}(\overline{G_1}) \times \mathcal{P}_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) \times \mathcal{P}_{\overline{G_1} \cap \overline{G_2}}(\overline{G_3}) \\ &= 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir au moins une partie gagnée sur les trois premiers match à pour probabilité :

$$1 - 0,144 = 0,856$$

Remarque : On aurait du montrer la formule :

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(\overline{G_1}) \times \mathcal{P}_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) \times \mathcal{P}_{\overline{G_1} \cap \overline{G_2}}(\overline{G_3}) \\ &= \mathcal{P}(\overline{G_1}) \times \frac{\mathcal{P}(\overline{G_1} \cap \overline{G_2})}{\mathcal{P}(\overline{G_1})} \times \frac{\mathcal{P}(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3})}{\mathcal{P}(\overline{G_1} \cap \overline{G_2})} \\ &= \mathcal{P}(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) \end{aligned}$$

4. Par définition :

$$p_{n+1} = \mathcal{P}(G_{n+1})$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} &= \mathcal{P}(G_{n+1} \cap G_n) + \mathcal{P}(G_{n+1} \cap \overline{G_n}) \\ &= \mathcal{P}(G_n) \times \mathcal{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathcal{P}(G_n) \times \mathcal{P}_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,8 \cdot p_n + 0,6 - 0,6 \cdot p_n \\ &= 0,2 \cdot p_n + 0,6 = \frac{1}{5} \cdot p_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

5. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par la relation :

$$\mathcal{P}_n : "p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n"$$

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul :

● Initialisation :

On a les deux valeurs :

$$p_1 = 0,1 \quad \left| \quad \begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 &= \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{15}{20} - \frac{13}{20} \\ &= \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \end{aligned} \right.$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

● Hérédité :

Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ réalisée pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est à dire qu'on l'hypothèse de récurrence suivante :

$$u_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

La relation de récurrence entre les termes de la suite (p_n) obtenue à la question 4. permet d'écrire :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{5} \cdot p_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \right] + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{20} - \frac{13}{20} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{12}{20} = \frac{15}{20} - \frac{13}{4} \times \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

On vient de montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

● Conclusion :

La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

6. De l'encadrement $0 < \frac{1}{5} < 1$, on en déduit la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

Ainsi, on en déduit la limite des termes de la suite (p_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{3}{4}$$

7. Résolvons cette inéquation :

$$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$$

D'après l'expression de p_n obtenue précédemment :

$$\frac{3}{4} - \left[\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \right] < 10^{-7}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7}$$

$$\frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \times \frac{4}{13}$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log \left[\left(\frac{1}{5}\right)^n \right] < \log \left(10^{-7} \times \frac{4}{13} \right)$$

$$n \cdot \log \left(\frac{1}{5}\right) < \log \left(10^{-7} \times \frac{4}{13} \right)$$

Le nombre $\log \left(\frac{1}{5}\right)$ est négatif :

$$n > \frac{\log \left(10^{-7} \times \frac{4}{13} \right)}{\log \left(\frac{1}{5}\right)}$$

On a la valeur approchée : $\frac{\log \left(10^{-7} \times \frac{4}{13} \right)}{\log \left(\frac{1}{5}\right)} \simeq 10,74$

$$n \geq 11$$

On en déduit que l'inégalité est vérifiée pour tous les entiers naturels n supérieurs ou égaux à 11.

21. Annales :

Exercice 5404



On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0,6$

- Donner la loi de la variable $\mathcal{X}$ sous la forme d'un tableau.
(On arrondira les probabilités au millièmes près).
- Déterminer les probabilités suivantes :
a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 1)$

Correction 5404



- Voici le tableau de la loi de probabilité de la variable

aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

- On a l'égalité :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$
 $\simeq 0,010 + 0,077 = 0,087$
 - Par complémentarité des deux événements $\{\mathcal{X} \leq 1\}$ et $\{\mathcal{X} > 1\}$, on a :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) \simeq 1 - 0,087 = 0,913$

Exercice 5397



On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 6 et 0,3.

- Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondies au centième près :
a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$
- En déduire la valeur, approchée millièmes près, de :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 2)$

Correction 5397



- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \binom{6}{0} \times 0,3^0 \times 0,7^6 = 0,7^6 \simeq 0,168$
 - $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \binom{6}{1} \times 0,3^1 \times 0,7^5 = 6 \times 0,3 \times 0,7^5 \simeq 0,360$
- Par complémentarité des deux ensembles $\{\mathcal{X} \leq 1\}$ et $\{\mathcal{X} \geq 2\}$, on en déduit la relation suivante :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 2) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1) = 1 - (0,168 + 0,360)$
 $\simeq 1 - 0,528 = 0,472$

Exercice 4234



Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

- On admet que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
- Calculer la probabilité des événements suivants :
a. A : "il n'y a aucun stylo avec un défaut" ;
b. B : "il y a au moins un stylo avec un défaut" ;
c. C : "il y a exactement deux stylos avec un défaut".

Correction 4234



- On prélève à chaque fois 8 stylos successivement et avec remise et la probabilité d'un stylo d'avoir un défaut est de 0,1. Ainsi, la variable $\mathcal{X}$ qui compte le nombre de stylo possédant un défaut est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 8 et 0,1 :
 $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(8; 0,1)$.
- Voici le calcul des probabilités demandées :
a. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \binom{8}{0} \times 0,1^0 \times 0,9^8 = 0,9^8 \simeq 0,43$
b. $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} < 1)$
 $= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) \simeq 0,57$
c. $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \binom{8}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^6 \simeq 0,15$

Exercice 5403



On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0,63$.

- A l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :
a. $\binom{15}{13}$ b. $\binom{15}{14}$ c. $\binom{15}{15}$
- Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondie à 10^{-4} près :
a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=14)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$

- En déduire la valeur, arrondie à 10^{-4} près, de la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X} \leq 12\}$.

Correction 5403



- Voici les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice :
a. $\binom{15}{13} = 105$ b. $\binom{15}{14} = 15$ c. $\binom{15}{15} = 1$
- Voici la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^4 près des probabilités demandées :
a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13) = \binom{15}{13} \times 0,63^{13} \times 0,37^2 \simeq 0,0354$

$$\text{b. } \mathcal{P}(\mathcal{X}=14) = \binom{15}{14} \times 0,63^{14} \times 0,37 \simeq 0,0086$$

$$\text{c. } \mathcal{P}(\mathcal{X}=15) = \binom{15}{15} \times 0,63^{15} \simeq 0,0010$$

3. Des résultats précédents, on obtient :
- $$\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 13) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=13) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=14) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$$
- $$\simeq 0,0354 + 0,0086 + 0,0010 = 0,045$$
- On en déduit la probabilité recherchée :
- $$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 12) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 13) \simeq 1 - 0,045 = 0,955$$

Exercice 5423

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 0,2 et 20.

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

$$\text{a. } \mathcal{P}(\mathcal{X}=5) \quad \text{b. } \mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$$

2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

$$\text{a. } \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 5) \quad \text{b. } \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 9)$$

Correction 5423

1. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) \simeq 0,1746 \simeq 0,175$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9) \simeq 0,0073 \simeq 0,007$

2. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 5) \simeq 0,8042 \simeq 0,804$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 9) \simeq 0,9974 \simeq 0,997$

Exercice 5441

On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre $n=22$ et $p=0,37$

A l'aide de la calculatrice et sans justification, donner la probabilité de $\mathcal{P}(3 \leq \mathcal{X} \leq 7)$ arrondie à 10^{-4} près.

Correction 5441

La calculatrice permet d'obtenir les deux valeurs suivantes :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2) \simeq 0,036 \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 7) \simeq 0,3961$$

Les ensembles $\{\mathcal{X} \leq 2\}$ et $\{3 \leq \mathcal{X} \leq 7\}$ sont disjoints entre eux :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 7) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2) + \mathcal{P}(3 \leq \mathcal{X} \leq 7)$$

$$\mathcal{P}(3 \leq \mathcal{X} \leq 7) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 7) - \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$$

On en déduit la probabilité recherchée :

$$\mathcal{P}(3 \leq \mathcal{X} \leq 7) \simeq 0,3961 - 0,036 = 0,3601$$