Terminale SE / Similitudes

1. Transformation et complexe :

Exercice 4087

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. On désigne par m un nombre réel. On considère la transfromation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = (m+i)\cdot z + m - 1 - i$

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?
2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Exercice 3995

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\vec{j}\,\big)$.

On considère le point M du plan d'affixe z. Pour chaque question, on associe au point M un point M' dont l'affixe z' est définie en fonction de z.

Déterminer la nature et les caractéristiques de chacune de ces applications :

a. $z' = z - 1 + 2\cdot i$ b. $z' = 2\cdot z + 3 - 2\cdot i$

c. $z' = \Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\Big)\cdot z + 1 + i$

Exercice 3996

Dans le plan muni du repère $\big(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\big)$. On considère les trois similitudes du plan :

- h est l'homothétie de centre A d'affixe $1+i$ et de rapport 2 ;
- t est la translation dont le vecteur a pour affixe $-1+2\cdot i$;
- r est la rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et de centre B d'affixe $\Big(1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\Big)+i\cdot\Big(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Big)$.

1. Donner l'expression des applications complexes associés aux similitudes h, t et r.
2. Déterminer les expressions complexes des transformations :

   a. $r\circ h$ b. $h\circ r$

   c. $t\circ r$ d. $r\circ t$
3. On considère la rotation r' de centre C d'affixe 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Déterminer l'expression complexe de la transformation $r\circ r'$.

   b. Donner les caractéristiques de la transformation $r\circ r'$.

Exercice 4003

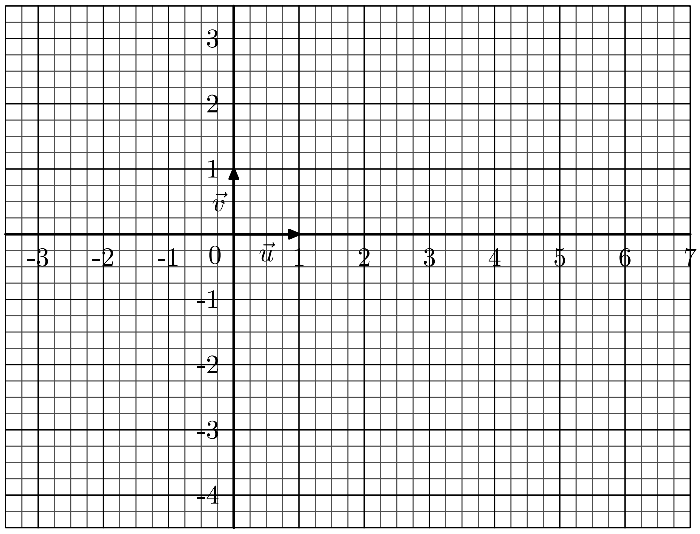
Dans le complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe :
$z \longmapsto \dfrac{3}{2}\cdot(1-i)\cdot z + 4 - 2\cdot i$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner un démonstration de la réponse choisie :

$f = r\circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2\cdot i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3997

On considère le plan $\big(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\big)$; soit A et A' les deux points du plan d'affixes respectives $\dfrac{1}{2}-i$ et $-3+2\cdot i$.



1. Placer les points A et A' dans le repère ci-dessus.
2. a. Déterminer le centre de l'homothétie h de rapport $\dfrac{1}{2}$ transformant le point A en A'.

   b. Soit M un point du plan et z son affixe. On note M' l'image de M par h et z' son affixe. Montrer qu'on a la relation :
   $z' = 2\cdot z - 4 + 4\cdot i$

   c. Soit B et C les deux points d'affixes respectives $\dfrac{1}{2}-2\cdot i$ et $\dfrac{9}{2}-i$. Déterminer les affixes des points B' et C' images des points B et C par l'homothétie h.
   Placer tous ces points sur le graphique.
3. On considère le point D d'affixe 3. Soit h' l'homothétie de centre D d'affixe i et de rapport $-\dfrac{3}{2}$.

   a. Donner l'expression complexe de la similitude h'.

   b. Déterminer les affixes des images de A, B, C.

   c. Tracer l'image du triangle ABC par l'homothétie h'.

2. Similitude directe :

Exercice 4034

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ d'unité $1\,cm$.

1. Soient les points C et D d'affixes respectives $c=3$ et $d=1-3{\cdot}i$, et $\mathcal{S}_1$ la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $\left(O\,;\,\vec{u}\right)$ des réels.
   a. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par $\mathcal{S}_1$. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
   b. Donner l'expression complexe de $\mathcal{S}_1$.
2. Soit $\mathcal{S}_2$ la similitude directe définie par :
   - le point C_1 et son image C' d'affixe $c'=1+4{\cdot}i$;
   - le point D_1 et son image D' d'affixe $d'=-2+2{\cdot}i$.

   a. Montrer que l'expression complexe de $\mathcal{S}_2$ est :
   $z' = i{\cdot}z + 1 + i$
   b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.
3. Soit $\mathcal{S}$ la similitude définie par : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$.
   Déterminer l'expression complexe de $\mathcal{S}$.

Exercice 4032

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique $1\,cm$, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1+i \quad ; \quad b = -1+2{\cdot}i \quad ; \quad c = 2+3{\cdot}i$$

$$m = 7-5{\cdot}i \quad ; \quad n = 5-i \quad ; \quad p = 9+i$$

1. a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.
   b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.
   c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence la similitude directe qui transforme le triangle ABC en le triangle MNP.

2. Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.
   a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :
   $$z' = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}{\cdot}i\right){\cdot}z+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}{\cdot}i$$
   b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s.
   c. Vérifier que la similitude s transforme le point C en M.

Exercice 4033

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est $1\,cm$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points B, C et H d'affixes respectives :
$b = 5{\cdot}i \quad ; \quad c = 10 \quad ; \quad h = 2+4{\cdot}i$

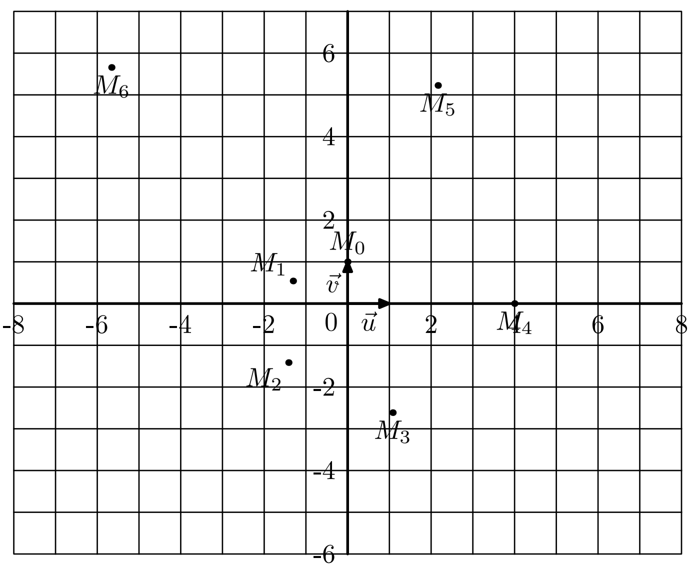
Construire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Etude de la position du point H :
   a. Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).
   b. Calculer $\dfrac{h}{h-c}$, et en déduire que :
   $$\left(\overrightarrow{HC}\,;\overrightarrow{HA}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2{\cdot}\pi]$$
2. Etude d'une première similitude :
   a. Calculer les rapports : $\dfrac{BH}{AH}$; $\dfrac{BA}{AC}$; $\dfrac{AH}{CH}$
   b. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.
   c. Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.

Exercice 3998

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$z' = \sqrt{2}{\cdot}e^{\frac{3\cdot i\cdot\pi}{8}}{\cdot}z$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : le point M_0 a pour affixe $z_0=i$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1}=f\left(M_n\right)$.
On note z_n l'affixe du point M_n. Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée ci-dessous :



1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2. On note g la transformation $f{\circ}f{\circ}f{\circ}f$.
   a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques

de la transformation g.

b. En déduire que pour tout entier naturel n :
$$OM_{n+4} = 4{\cdot}OM_n \quad ; \quad \left(\overrightarrow{OM_n}\,;\overrightarrow{OM_{n+4}}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2{\cdot}\pi]$$

c. Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.

3. Démontrer que pour tout entier naturel :
$$z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n{\cdot}e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\cdot n\cdot\pi}{8}\right)}$$

4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$.

a. Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_p}\,;\overrightarrow{OM_n}\right)$.

b. Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si, et seulement si, $n-p$ est un multiple de 8.

Exercice 4063

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :
$$z' = \frac{1+i{\cdot}\sqrt{3}}{2}{\cdot}z \quad ; \quad z'' = e^{i\cdot\frac{\pi}{5}}{\cdot}z$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives :
$$a_0 = 2{\cdot}e^{-2\cdot i\cdot\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad b_0 = 4{\cdot}e^{-i\cdot\frac{\pi}{5}}$$
Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :
$$A_{n+1} = f(A_n) \quad ; \quad B_{n+1} = g(B_n)$$
On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

a. Quelle est la nature de chacun des triangles OA_nA_{n+1} ?

b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB_n}\,;\overrightarrow{OB_{n+2}}\right)$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 4172

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$

Soit A et C les points d'affixes respectives :
$$a = 3+5{\cdot}i \quad ; \quad c = 1+4{\cdot}i$$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2-2{\cdot}i){\cdot}z+1$

1. Soit M le point d'affixe $z = x+i{\cdot}y$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x+3{\cdot}y = 2$

2. On considère l'équation (E): $x+3{\cdot}y=2$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-4\,;2)$ est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux. Placer ces points sur la figure.

Exercice 4756

Dans le plan complexe, on considère la fonction complexe f définie pour tout nombre z complexe par :
$$f(z) = \frac{1}{2}{\cdot}(1+i){\cdot}z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}{\cdot}i$$

On définit la suite (a_n) par les relations :
$$a_0 = 4+2{\cdot}i \quad ; \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Pour tout entier n naturel, on définit le point A_n d'affixe a_n.

On considère la similitude $\mathcal{S}$ définit par la relation :
$$z = f(z)$$

1. Préciser la nature de $\mathcal{S}$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. En déduire la convergence de la suite (a_n).

3. Similitude indirecte :

Exercice 4092

Dans le plan muni du repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A d'affixe $3{\cdot}i$ et B d'affixe 6.

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

Exercice 4169

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

1. On considère la similitude s admettant l'écriture complexe :
$$z' = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}{\cdot}i\right){\cdot}z+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}{\cdot}i$$
Déterminer l'ensemble des points invariants de la similitude s.

2. On considère la similitude σ admettant l'écriture complexe :
$$z' = i{\cdot}\overline{z}+1+i$$
Déterminer l'ensemble des points invariants de la similitude σ.

Exercice 4171

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes respectives 2 et $1-i$.

Déterminer l'écriture complexe de la symétrie axiale d'axe (AB).

Exercice 4062

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$z_A = 2+i \quad ; \quad z_B = 5+2\cdot i \quad ; \quad z_C = i$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

1. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' telle que :
$$z' = \Big(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot i\Big)\cdot\overline{z} + \Big(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot i\Big)$$
2. En déduire l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).
3. Démontrer que l'ensemble des points M' tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x+3y=1$
4. Vérifier que le point C' appartient à $(\mathcal{D})$.

Exercice 4031

$\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe *(unité graphique : 4 cm)*

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z}+2$.

1. Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1+i\cdot\sqrt{3}$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
3. Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Exercice 4088

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère les deux rectangles $OABC$ et $DEFG$ où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives.

$z_A = -2 \quad ; \quad z_B = -2+i \quad ; \quad z_C = i \quad ; \quad z_D = 1$

$z_E = 1+3\cdot i \quad ; \quad z_F = \dfrac{5}{2}+3\cdot i \quad ; \quad z_G = \dfrac{5}{2}$

On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe :

$z' = -\dfrac{2}{3}\cdot i\cdot\overline{z} + \dfrac{5}{3}\cdot i$

1. Déterminer l'image du rectangle $DEFG$ par la similitude s'.
2. On considère la similitude $g = s'\circ s$. Déterminer l'image du rectangle $OABC$ par la similitude g.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non-frutueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

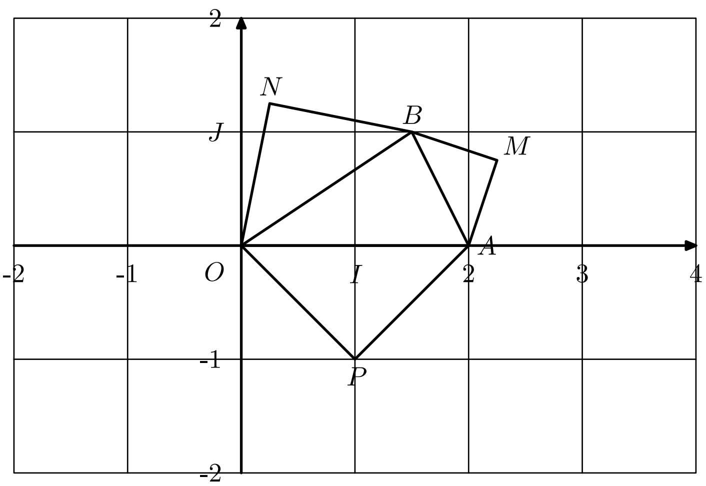
4. Similitudes directes :

Exercice 4011

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = \dfrac{3}{2}+i$

On considère les points M, N et P tels que les triqngles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous :



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation :

$r = s_2\circ s_1$

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. **A l'aide des transformations :**
   a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.
   b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.
   c. Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
   d. Quelle est l'image du point O par r ?
   e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.
2. **En utilisant les nombres complexes :**
   a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a..
   b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.

c. Donner, sans justification, l'affixe z_p du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Exercice 3217

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ *(unité 1 cm)*. On construira une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r.
Montrer que B a pour affixe $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant :
$$\left\{-3\,;\,-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\,\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\,-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3. a. Déterminer $r(F)$.
 b. Quelle est la nature du polygone $ABCDEF$?

4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
 a. Déterminer l'angle et le rapport de s' ? En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
 b. Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?
 c. Déterminer l'écriture complexe de s'.

5. Soit A' le symétrique de A par rapport à C.
 a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de A' par $s' \circ s$.
 b. Calculer l'affixe du point A'. Retrouver alors le résultat du a. en utilisant l'écriture complexe $s' \circ s$.

Exercice 4002

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :
Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si, et seulement si, f admet une écriture complexe de la forme :
$z' = a{\cdot}z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_A = -\sqrt{3}-i$; $z_B = 1-i{\cdot}\sqrt{3}$

$z_C = \sqrt{3}+i$; $z_D = -1+i{\cdot}\sqrt{3}$

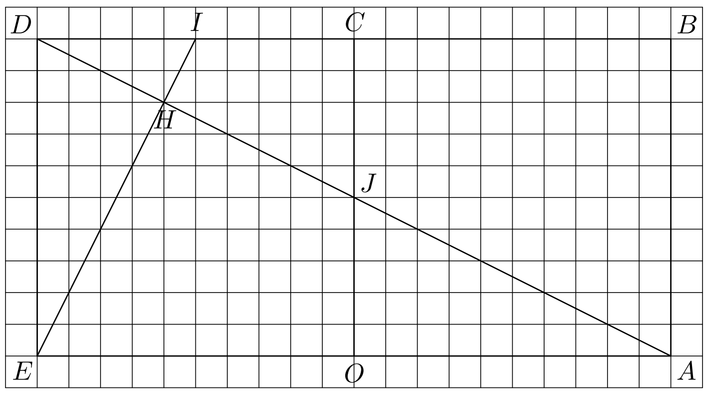
1. a. Donner le module et un argument de chacun des quatres nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
 b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D *(on prendra pour unité graphique 2 cm)*.
 c. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est :
$z' = e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}{\cdot}z + 2$.
 a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.
 b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.
 c. Que constate-t-on concercnant ces points E, F et J ? Le démontrer.

Exercice 3251

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :
$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$, par J le milieu du segment $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$



1. Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.

2. Déterminer le rapport de cette similitude s.
On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

3. Donner, sans justifier, l'image de B par s.

4. Déterminer et placer l'image de C par s.

5. Soit Ω le centre de la similitude s :
 a. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.
 b. Montrer que Ω ne peut être le point H.
 c. Construire Ω.

6. On considère le repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OC}\right)$
 a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.
 b. En déduire l'affixe du centre Ω de s.

Exercice 4030

Partie 1 : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

Prérequis : On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha{\cdot}z + \beta$, où α est un nombre complexe non-nul et β est un nombre complexe.

Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe telle que :
$s(A) = B \quad ; \quad s(C) = D$

Partie 2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$ tel que :
$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2{\cdot}\pi]$$

On considère le point C tel que $ABCD$ est un carré.

Soit E le milieu du segment $[AD]$, on considère le carré $EDGF$ tel que $\left(\overrightarrow{ED}\,;\,\overrightarrow{EF}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2{\cdot}\pi]$.

1. a. Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.
   b. Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.
   c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que :
   $s(D) = F \quad ; \quad s(B) = D$
2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.
   a. Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s.
   b. Donner l'écriture complexe de cette similitude.
   c. Déterminer le centre Ω de la similitude directe s.

Exercice 4090

On considère un carré direct $ABCD$ *(c'est à dire un carré $ABCD$ tel que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$)* de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$. Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que :
   $s(A) = I \quad ; \quad s(B) = K$
2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.
3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.
   b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$)

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A\,;\,\frac{1}{10}{\cdot}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{10}{\cdot}\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.
2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe :
   $z' = \frac{i}{2}{\cdot}z + 5 + 5{\cdot}i$
3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.
4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.
5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

Exercice 3239

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. On prendra $5\,cm$ pour unité graphique.
Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω *(d'affixe ω)*, le rapport k et l'angle θ.
2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.
   a. Déterminer les affixes des points A_1, A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.
   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$
   c. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?
3. a. Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?
   En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n+1}A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 3271

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie

$ABCD$ est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right) = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré $ABCD$. Soit J le milieu du segment $[CD]$.
On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la *similitude s. Dans la partie A, on utilisera des raisonnement géométriques ; dans la partie B, on utilisera les nombres complexes.*

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre $[AI]$, Γ_2 est le cercle de diamètre $[BJ]$. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image du s du point I.

4. On pose $h = s \circ s$ *(composée de s avec elle-même).*
   a. Donner la nature de la transformation h *(préciser ses éléments caractéristiques).*
   b. Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

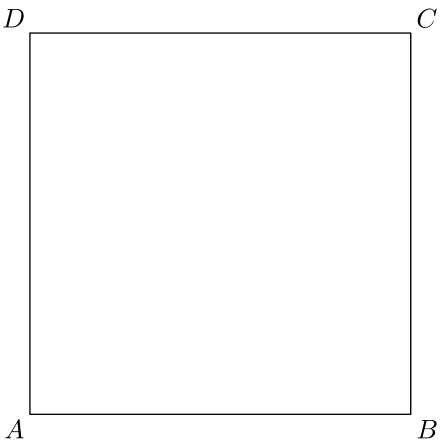
Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(A\,;\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2+2i$ et $2i$.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude est $z' = \dfrac{1}{2}iz + 1 + i$.

2. Calculer l'affixe du point Ω.

3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = 1$. Placer le point E sur la figure.



Exercice 4183

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe :
$$z' = \left(1 + i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\overline{z}$$
où $\overline{z}$ désigne le conjugé de z.

Soient les points A et B d'affixes respectives :
$$z_A = \sqrt{6} + i\cdot\sqrt{2} \quad ; \quad z_B = -\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{6}$$

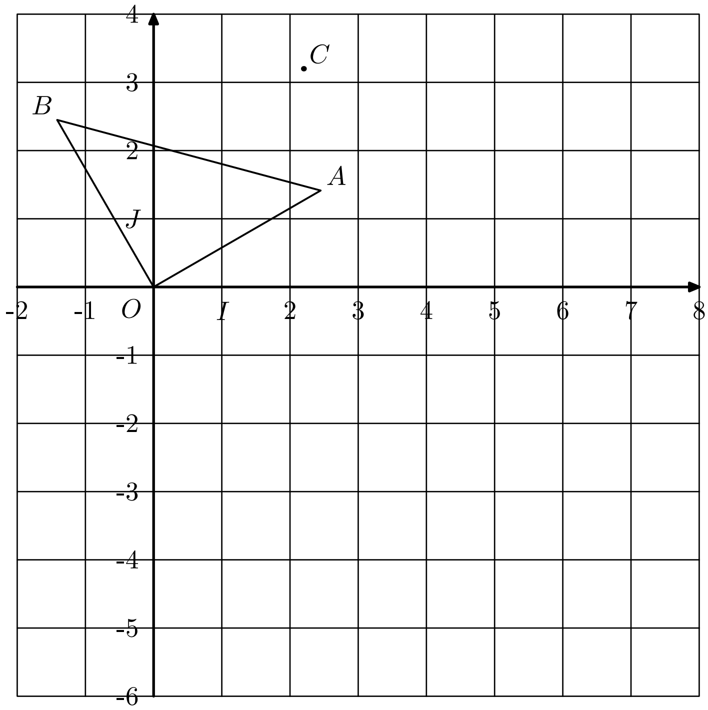
On note A' et B' les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. a. Ecrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
   b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
   c. En déduire la nature du triangle $OA'B'$.
   d. Montrer que l'affixe z'_A de A' vérifie l'égalité :
   $z_{A'} = 2\cdot z_A$
   En déduire la construction de A' et B'.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(O\,;\vec{u}\right)$. On pose $g = r \circ s$.
   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.
   b. Montrer que les points O et A sont invariants par g.
   c. En déduire la nature de la transformation g.

3. a. Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
   b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation f.



5. *Similitudes indirectes :*

Exercice 3227

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ *(unité graphique 4 cm)*

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_I = 1$; $z_J = i$; $z_H = 1+i$; $z_A = 2$

$z_B = \dfrac{3}{2}+i$; $z_C = 2i$; $z_D = -1$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

   Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1+\dfrac{1}{2}\cdot i$.

3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe :

$z' = -i\cdot\overline{z}+2i$

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.

2. a. Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?

   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?

3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4. On pose : $s = f\circ t^{-1}$:

   a. Montrer que l'écriture complexe de s est :
   $z = -i\cdot\overline{z}+1+i$

   b. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.

   c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

Exercice 4004

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\vec{v})$ l'unité graphique est $2\,cm$. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$a = 2$; $b = 2+3\cdot i$; $c = 3\cdot i$

$d = -\dfrac{5}{2}$; $e = -\dfrac{5}{2}$

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

2. On admet que deux rectangles sont semblables si, et seulement si, le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.
   Démontrer que $OABC$ et $ABDE$ sont deux recttangles et qu'ils sont semblables.

3. **Etude d'une similitude directe transformant $OABC$ en $ABDE$**

   a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.

   b. Démontrer que la similitude s transforme $OABC$ en $ABDE$.

   c. Quel est l'angle de la similitude s ?

   d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s\circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω.

4. **Etude d'une similitude indirecte transformant $OABC$ en $BAED$**

   a. Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui lqisse A invariant est :
   $z' = \dfrac{3}{2}\cdot i\cdot\overline{z}+2+3\cdot i$
   où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

   b. Montre que s' transforme s' transforme $OABC$ en $BAED$.

   c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'iniative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 4000

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considére les points A d'affixe 1 et B d'affixe 1. On appelle S la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe (AB).
   Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe :
   $z' = -i\cdot\overline{z}+1+i$

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2.
   Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H\circ S$.

   a. Montrer que f est une similitude.

   b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M' l'image d'un point M par f.

   a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = -\cdot\overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).

   b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = \cdot\overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

Exercice 4007

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. Unité graphique : $4\,cm$.

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

   $z_I = 1$; $z_J = i$; $z_H = 1+i$

   $z_A = 2$; $z_B = \dfrac{3}{2}+i$; $z_C = 2\cdot i$

   $z_D = -1$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

   Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe :

$z_F = -1 + \frac{1}{2}\cdot i.$

3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe :

$z' = -i\cdot\overline{z} + 2\cdot i$

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.

2. a. Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?

   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?

3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4. On pose $s = f \circ t^{-1}$:

   a. Montrer que l'écriture complexe de s est :
   $z' = -i\cdot\overline{z} + 1 + i$

   b. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.

   c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

Exercice 4091

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe (AB).

   Montrer que l'image M' par S d'un point m d'affixe z a pour affixe :
   $z' = -i\cdot\overline{z} + 1 + i$

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

   a. Montrer que f est une similitude.

   b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.

   a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\overrightarrow{AM''} = -2\cdot\overrightarrow{AM}$
   est la droite (AB).

   b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\overrightarrow{AM''} = 2\cdot\overrightarrow{AM}$
   est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

6. Suites de points :

Exercice 4009

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique : 4 cm)*. Soit Ω le point d'affixe2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

   a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

   b. Montrer que l'écriture complexe de 4σ est :
   $z \longmapsto \frac{1+i}{2}\cdot z + 1 - i.$

   c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montre que $z - z' = i\cdot(2 - z')$

2. a. **Question de cours :**
   Prérequis : définitions géométriques du module d'un complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.

   Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'aqffixe q telle que $q - a = i\cdot(p - a)$.

   b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2+i$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :
   pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :
   $$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot e^{i\cdot\frac{(n+2)\pi}{2}} + 2$$

   b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
   pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Exercice 3244

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique 4 cm)*.

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

   a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

   b. Montrer que l'écriture complexe de σ est :

$$z \longmapsto \frac{1+i}{2}z+1-i$$

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que :
$$z-z'=i(2-z')$$

2. a. **Question de cours**

- *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques modules et des arguments.*

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la roation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q-a=i(p-a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2+i$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

pour tout entier naturel n : $A_{n+1}=\sigma(A_n)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :
$$a_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}}+2$$

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :

pour $n\geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Exercice 4008

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On prendra $5\,cm$ pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :
$$z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)\cdot z+1$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω *(d'affixe ω)*, le rapport k et l'angle θ.

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose :
$$A_{n+1}=f(A_n)$$

a. Déterminer les affixes des points A_1, A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :
$$u_n=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

c. A partir de quel rang n_0, tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?

3. a. Quelle est la nature du triangle ΩA_0A_1 ? En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle ΩA_nA_{n+1}.

b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$. On a ainsi :
$$\ell_n=A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n.$$
Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

7. Arithmétiques :

Exercice 4005

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;,\vec{u}\,;\vec{v})$.

Soient A et B les points d'affixes respectives :
$$z_A=1-i \quad ; \quad z_B=7+\frac{7}{2}\cdot i$$

1. On considère la droite (d) d'équation $4\cdot x+3\cdot y=1$. Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k\,(3\cdot k+1\,;-4\cdot k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui trqnsforme B en $M_{-1}\,(-2\,;3)$.

3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe :
$$z'=\frac{2}{3}\cdot i\cdot z+\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\cdot i$$
Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s :

a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b. A partir de quel entier n le point B_n, appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

Exercice 4006

1. Le plan complexe est rapporté à un repère à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
$$z_A=2+i \quad ; \quad z_B=5+2\cdot i \quad , \quad z_C=i$$
s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que :
$$z'=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot i\right)\cdot\overline{z}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot i\right)$$

b. En déduire l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).

c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :
$$4\cdot x+3\cdot y=1$$

d. Vérifier que le point C appartient à $\mathcal{D}$.

2. a. Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser sont rapport.

c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation :
$4{\cdot}x + 3{\cdot}y = 1$.

b. Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

255. Non-publiés :

Exercice 1440

On considère l'équation $(E) : 3{\cdot}x - 2{\cdot}y = 1$

1. a. Montrer que le couple $(-1\,;-2)$ est une solution de (E).

b. Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

2. Soient d et d' les droites d'équations respectives :
$y = 2{\cdot}x + 4 \quad ; \quad 3{\cdot}x - 2{\cdot}y = 1$

a. Vérifier que pour tout entier relatif k, le point A_k de coordonnées $(k-3\,;2{\cdot}k-2)$ appartient à la droite d.
On admettra que ce sont les seuls points de d à coordonnées entières.

b. Montrer que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2{\cdot}k'-1\,;3{\cdot}k'-2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

3. a. Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que : $A_k = B_{k'}$?

b. Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que le segment $[A_kB_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

c. Trouver l'entier q tel que $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}} = 4{\cdot}\overrightarrow{u}$

4. Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω. On note H le milieu du segment $[A_6B_4]$.

On désigne par f la similitude directe de centre Ω, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la similitude f.

b. Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point H soit l'origine O du repère.

Exercice 4698

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment $[BC]$. La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F.
Soit le point G, centre de gravité du triangle ABC et les points H et A', symétriques de G et A par rapport à la droite (BC).
On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF.

On dédinit les similitudes directes S_1, de centre C, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et S_2, de centre B, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et leur composée $f = S_2 \circ S_1$

1. Déterminer les images de J et H par f.

2. Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de f.

3. En déduire la nature du triangle HIJ.

Exercice 4128

ABC est un triangle équilatéral tel que :
$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par :
$$\overrightarrow{AM} = t{\cdot}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BN} = t{\cdot}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CP} = t{\cdot}\overrightarrow{CA}$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ direct.

On note a, b, c, m, n et p, les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P :

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.
On notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2{\cdot}\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre du système de points :
$$\left\{(A\,;1-t)\,;\,(B\,;t)\right\}$$
et, en déduire que $r(M) = N$.
On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}\,;\overrightarrow{GM}\right)$.
Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.

