RECUEIL D'EXERCICES

TSE - TSI

Étude de fonctions numériques d'une variable réelle

Sources :

- *LYCEE GNETAASO (LGDK) - http://www.gnetaaso.com/fiche.html*

1. Logarithme népérien - ln

EXERCICE 1 :

1. Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $\ln(x+1) + \ln(3x-2) = 3\ln 2$; b) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$; c) $\ln(\ln x) = \ln(\ln(3x-6))$;

d) $\ln^3 x + \ln^2 x - 17\ln x + 15 = 0$; e) $\ln^4 x - 13\ln^2 x + 36 = 0$; f) $\left[\ln(x+1) - \ln(x-2)\right]^2 = 1$.

2. Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $\ln(x+3) + \ln(x+5) \leq \ln(x+15)$; b) $\ln^2 x - \ln\frac{1}{x} - 2 > 0$; c) $\ln\frac{x(10-x)}{16} \leq 0$.

3. Résoudre dans ℝ×ℝ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln(x+y) = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = 19 \\ 3\ln x - 5\ln y = -19 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = m \\ \ln x + \ln y = \ln(m+1) \end{cases}$ (on discutera suivant les valeurs du réel m).

EXERCICE 2 :

1. Soit a et b deux nombres réels et f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de f passe par le point A (1 ; 0) et admette en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

2. On donne la fonction g de ℝ vers ℝ définie par : $\begin{cases} g(x) = (x-1)^2 \text{ si } x < 1 \\ g(x) = \ln x \quad \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

a) Démontrer que g est continue sur ℝ.

b) Étudier la dérivabilité de g au point 1.

3. a) Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1. En utilisant les inégalités des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle$[1; x]$; montrer que pour tout $x > 1$, on a : $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$. ①

b) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle$]0; 1[$; montrer que les inégalités ① sont vraies.

EXERCICE 3 :

1. Soit g la fonction de ℝ vers ℝ définie par $g(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x$.

Étudier les variations de g ; calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2. On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par $f(x) = |x-1|\ln x$

a) Étudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

d) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser. La bijection réciproque f^{-1} de f est-elle dérivable au point 0 ? Représenter sur le même graphique que $(\mathcal{C})$ la courbe (Γ) de f^{-1}.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = x\ln x$ et on appelle (Γ) sa courbe représentative. Étudier g et tracer (Γ).

3.a) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que les courbes (Γ) et $(\mathcal{C})$ sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.

4. Étudier le sens de variation de la fonction dérivée f'. En déduire le signe de f'.

5. Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe $(\mathcal{C})$ sur le même graphique que (Γ).

EXERCICE 5 :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$; $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. a) Démontrer que pour nombre réel positif x on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

b) En déduire que pour tout $x > 0$; $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

c) Étudier la dérivabilité de f en 0.

2. Démontrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$ où φ est une fonction à préciser.

3. Étudier les variations de la fonction φ sur$]0; +\infty[$. En déduire le signe de φ.

4. Calculer la limite de f en $+\infty$; dresser le tableau de variation de f puis tracer $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 6 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation

2. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par

rapport à (Δ).

3. Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$. Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en I et construire $(\mathcal{C})$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique x_0 et que $x_0 \in \left]\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right[$.

<u>EXERCICE 7</u> :

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la famille de fonctions f_n par :

$f_n(x) = x(\ln x)^n$ pour $x \neq 0$ et : $f_n(0) = 0$.

On appelle $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.
2. Étudier les variations de f_1 et construire $(\mathcal{C}_1)$.
3. Étudier les variations de f_n pour $n > 1$. (On distinguera deux cas suivant la parité de n)
4. Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par trois points fixes
5. Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$ lorsque x décrit l'intervalle $[1; +\infty[$.
6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_2)$ sur le même graphique que $(\mathcal{C}_1)$.

<u>EXERCICE 8</u> :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 - x - 4\,\frac{\ln x}{x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormal.

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 - 4 + 4\ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g et déterminer son maximum sur $]0; +\infty[$.

b) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

2.a)Calculer les limites de f en 0 et en$+\infty$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Vérifier que : $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$.

4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ et étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).

5. Déterminer les coordonnées du point A de $(\mathcal{C})$, sachant que $(\mathcal{C})$ admet en A une tangente (T) parallèle à (Δ).

6. Tracer les droites (Δ) et (T), puis la courbe $(\mathcal{C})$.

7. Soit la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

Calculer h'(x) ; en déduire les primitives de f sur $]0; +\infty[$.

<u>EXERCICE 9</u> :

f est la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0; 1]$; $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{1+x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{j}\| = 2\|\vec{i}\|$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire : Soit u la fonction définie sur $]0; 1]$ par $u(x) = \frac{1+x}{2+x} + \ln x$.

Dresser le tableau de variation de u.

En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a dans l'intervalle $]0; 1]$.

Vérifier que : $0,54 \leq a \leq 0.55$.

2. Étude de la fonction :

a) $]0; +\infty[$ la dérivabilité de f en zéro. Que peut-on déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?

b) Démontrer que f est dérivable sur $]0; 1]$ et que $f'(x) = \frac{x(2+x)}{(1+x)^2} \times u(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

c) Démontrer que $f(a) = -\frac{a^2}{2+a}$ et tracer la courbe $(\mathcal{C})$ en mettant en évidence les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

<u>EXERCICE 10</u> :

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln x - 1$.

Étudier le sens de variation de g. En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1. a) Montrer que f est continue au point 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0 ; on précisera la valeur de sa dérivée en 0.

c) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

d) Étudier le sens de variation de f, dresser son tableau de variation et tracer sa courbe $(\mathcal{C})$.

<u>EXERCICE 11</u> :

1. On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$.

a) Étudier les variations de g. Préciser $g(1)$.

b) En déduire le signe de g sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

2. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$; $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression de f(x)). Déterminer la limite de f en 0.

c) Montrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$. En déduire le sens de variation de f.

d) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormal.

3.a)Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur l'intervalle$]0; 1]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une solution unique β sur l'intervalle$]1; +\infty[$.

c) Montrer que $\alpha\beta = 1$. Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} ; en déduire un encadrement de α.

<u>EXERCICE 12</u> :

Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit m un nombre réel strictement positif et f_m la fonction définie par : $f_m(x) = \ln(mx) + \frac{m}{\ln x}$. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m.

1.a) Déterminer l'ensemble de définition de f_m et étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_m)$.

b) Déterminer la dérivée de f_m et démontrer que l'ensemble des extremums de $(\mathcal{C}_m)$ lorsque m décrit $]0; +\infty[$ est la courbe (Γ) d'équation : $y = 2\ln(x|\ln x|)$

c) Étudier la fonction $x \mapsto 2\ln(x|\ln x|)$ et tracer (Γ).

2.a) Étudier la fonction f_1 et tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

b) On désigne par g la restriction de f_1 à l'intervalle$[e; +\infty[$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. Tracer la courbe représentative de g^{-1}.

3. Démontrer que $(\mathcal{C}_1)$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse α est solution de l'équation :
$(\ln x)^3 - \ln x - 2 = 0$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

<u>EXERCICE 13</u> :

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln|\ln x|$.

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.
2. Démontrer que pour tout nombre réel m, l'équation $\ln|\ln x| = m$ admet deux solutions x_1 et x_2. Calculer le produit x_1x_2

2. *Exponentiel - exp*

EXERCICE 1 :

1. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers$\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - e^x$

a) Démontrer que f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déduire les variations et le signe de f'.

c) Déterminer les variations de f et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+;\ x^2 < e^x$.

Retrouver ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$.

2. Soit n un entier naturel et la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers$\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt[n+1]{e^x} - x$.

a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner ses variations.

b) Déduire du tableau de variation de f_n qu'il existe un réel strictement positif a tel que : $\forall\ x \in\ ]a; +\infty[\ ;\ f_n(x) > 0$. Démontrer que : $\forall\ x \in\ ]a; +\infty[\ ;\ e^x > x^{n+1}$ et justifier ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

EXERCICE 2 :

1. Soit l'application φ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + 1$.

Étudier les variations de φ, en déduire le signe de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{R}^*$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.

b) Donner les variations de f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

EXERCICE 3 :

1. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers$\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$.

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé.

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right|$.

a) Étudier la dérivabilité de g en 0.

b) Utiliser les questions précédentes pour tracer la courbe représentative de dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 4 :

Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit la fonction $f : x \mapsto \ln|e^x - 1|$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1.a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b) Démontrer que qu'il existe une fonction φ telle que : $\forall\, x \in D$, $f(x) = x + \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

c) Compléter l'étude de f et tracer $(\mathcal{C})$.

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$.

a) Démontrer que g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

b) Tracer, sur le même graphique que $(\mathcal{C})$, la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de la réciproque de g.

EXERCICE 5 : (BAC 2013)

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang et est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant t est donnée approximativement par la fonction q définie par $q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$ où $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, q_0 la quantité de substance injectée en milligramme.

1. Établir le tableau de variation de q.

2. On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre deux valeurs q_m et q_M.

$q_m = 1,2$ mg est le seuil d'efficacité et $q_M = 2,6$ mg est le seuil de toxicité.

Déduire du tableau de variation de q, les valeurs qu'on peut donner à q_0 pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.

3. On pose $q_0 = 10$.

a) tracez soigneusement la courbe de q dans un repère de votre choix.

b) Déterminez graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

EXERCICE 6 :

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

I/ 1. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

Établir le sens de variation de g. Calculer $g(0)$; en déduire que pour tout réel $x > 0$; $g(x) > 0$

2. h est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = (2 - x)\, e^x - 1$.

a) Établir les variations de h et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1,8 < \alpha < 1,9$.

c) Préciser suivant les valeurs de x le signe de h(x).

II/ 1.a) Justifier que f est définie en tout point de $[0; +\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on peut écrire $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

2.a) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer l'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ de f avec la droite d'équation y = 1.

3. Tracer $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation y = 1. (On prendra 4 cm pour unité graphique)

4. Calculer en cm^2 l'aire du domaine $(\mathcal{D}) = \{ M (x ; y) / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) \leq y \leq 1 \}$

<u>EXERCICE 7</u> :

Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $[0; +\infty[$ la famille des fonctions f_n par :

$f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$. $(\mathcal{C}_n)$ est la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

A/ 1. a) Montrer que f_n est continue sur $[0; +\infty[$. Étudier la dérivabilité de f_n au point 0.

b) Calculer $f_n'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

c)Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

2. a) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2}$.

Étudier les variations de la dérivée g ' de g.

En déduire le signe de g' et celui de g , puis que pour tout nombre réel $t \geq 0$, on a :

$$0 \leq e^{-t} - (1 - t) \leq \frac{t^2}{2}. \quad ①$$

b) Démontrer grâce à ① que pour tout $x > 0$; $0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$.

En déduire que la droite $(\mathcal{D}_n)$ d'équation : $y = x - \dfrac{1}{n}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

3.a)Donner le tableau de variation de f_n.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et son asymptote en précisant la tangente en O.

c) Démontrer que pour tout $n > 0$; $(\mathcal{C}_n)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$. Construire $(\mathcal{C}_2)$ sur le même graphique que $(\mathcal{C}_1)$.

B/ 1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ a une solution α_n dans $[0; +\infty[$.

2. Démontrer que α_n est solution de l'équation : $x\ln x = \dfrac{1}{n}$

3. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = x\ln x$.

a) Étudier son sens de variation.

b) Prouver que la suite (α_n) est décroissante.

4.a) Justifier que suite (α_n) converge et que sa limite α est supérieure ou égal à 1.

b) Démontrer que $h(\alpha) = 0$. En déduire la valeur de α.

EXERCICE 8 :

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2 + e^{-\frac{1}{2}x}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. a) Étudier le sens de variation de f ' fonction dérivée de f.

   Déterminer la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(0)$.

b) En déduire l'existence d'un réel strictement positif α pour lequel f ' s'annule.

Vérifier que $0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$.

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire les variations de f.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) On pose pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$; $d(x) = f(x) - (x^2 - 2)$.

Déterminer le signe de d(x) et sa limite lorsque x tend vers$+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

3. a) Dresser le tableau de variation de f. Donner, en le justifiant le signe de $f(\alpha)$.

b) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution unique β dans l'intervalle $[\alpha; +\infty[$. Justifier que : $0{,}8 \leq \beta \leq 0{,}9$.

c)Déduire de cette étude le signe de f(x) pour tout élément x de l'intervalle$[0; +\infty[$.

4. Tracer la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation : $y = x^2 - 2$ et la courbe $(\mathcal{C})$ sur le même graphique.

EXERCICE 9 :

Le repère (O, I, J) est orthogonal. L'unité graphique est égale 2 cm sur (OI) et à 15 cm sur (OJ).

Soit f_m la famille de fonctions définies par : $f_m(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}$, où m est un nombre entier naturel non nul. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m.

1. a) Démontrer par récurrence sur m que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*, (\forall\, x \in [0; +\infty[,\ e^x > \frac{x^m}{m!})$.

En déduire que les parties d'abscisses positives des courbes $(\mathcal{C}_m)$ sont comprises entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

b) Calculer alors les limites de $f_m(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. a) Étudier les variations de f_m suivant les valeurs de m.

(On distinguera les cas m =1, m pair et m impair).

b) Dresser les tableaux de variations correspondant à chaque cas.

3. On désigne par A_m le point de le point de $(\mathcal{C}_m)$ dont l'abscisse définit le maximum relatif de f_m.

a)Vérifier que : $\forall\ m \in \mathbb{N}^*,\ f_m - f_{m+1} = f'_{m+1}$. Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{m+1})$ et démontrer que ces courbes se coupent en O et A_{m+1}.

b) Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_m)$ et $(\mathcal{C}_{m+2})$ et démontrer que ces courbes se coupent en O et en un point dont l'abscisse appartient à $[m; m+2]$.

4. Utiliser les résultats précédents pour tracer les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$.

On précisera les points d'intersection des courbes que la question précédente permet de connaître, ainsi que les tangentes en O à ces différentes courbes.

<u>EXERCICE 10</u> :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé (0, I, J).

1. Démontrer que f est une fonction impaire. Étudier la fonction f et tracer $(\mathcal{C})$.

2. a) Déterminer les primitives de f. (On pourra remarquer que : $\dfrac{1}{1+e^x} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$).

b) Calculer l'aire, en unités d'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y = x - 1$, $x = 0$ et $x = a$ $(a > 0)$. Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$?