RECUEIL D'EXERCICES

TSE - TSI

Études des nombres complexes

Sources :

- *LYCEE GNETAASO (LGDK) - http://www.gnetaaso.com/fiche.html*

EXERCICE 1 :

On donne les nombres complexes $z_1 = (1-i)(1+2i)$; $z_2 = \frac{2+6i}{3-i}$ et $z_3 = \frac{4i}{i-1}$. On désigne par M_1, M_2 et M_3 les points images respectives de ces nombres dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1, z_2 et z_3 et placer les points M_1, M_2 et M_3.

2. Calculer $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$. En déduire la nature du triangle $M_1M_2M_3$.

3. Déterminer la l'affixe z_4 du point M_4 tel que $M_1M_2M_4M_3$ soit un carré.

EXERCICE 2 :

On considère les nombres complexes $z = -12i\sqrt{3} + 12$, $z' = -6\sqrt{3} + 6i$ et $u = \frac{z}{z'}$.

1. Calculer le module et un argument de z et z'.

2. Écrire u sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3. Calculer u^3 ; u^4 ; u^6 et $v = \frac{1}{u^4} + \frac{1}{\bar{u}^4}$. Donner le résultat sous forme algébrique.

EXERCICE 3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$; b) $|z| - 2z = 1 - 2i$; c) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

2. Déterminer les nombres complexes z tells que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$

EXERCICE 4 :

On considère le nombre complexe $u = -3 + 3i$

1. Déterminer le module et un argument de u.

2. Déterminer le nombre complexe z tel que $uz = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

En déduire les valeurs de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1-iz}{1+iz}$

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de f(z) en fonction de z et de $\bar{z}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que :

a) f(z) soit un nombre réel ; b) f(z) soit un nombre imaginaire pur.

EXERCICE 6 :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soient A et B les points d'affixes respectives i et -2i et f l'application qui au point M(z) tel que z ≠ i, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$

1. Montrer que $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

2. Notons r le module et θ un argument de z – i, de même notons r' et θ' le module et un argument de z' + 2i. Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ.

2. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1. Montrer que si M appartient à $(\mathcal{C})$ alors M' appartient à un cercle $(\mathcal{C}')$ de centre B que l'on précisera.

EXERCICE 7 :

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$; b) $z_2 = \frac{1-\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$ $(\alpha \in [0; \pi[)$;

c) $z_3 = -2(\sin x + i\cos x)$; d) $z_4 = -3e^{\frac{2\pi}{3}i}$

2. On considère le nombre complexe $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

a) Écrire z sous forme exponentielle

b) Déterminer les entiers naturels n pour les quels z^n est un nombre réel. Calculer z^n pour la plus petite des valeurs de n obtenues.

c) Déterminer les entiers naturels n pour les quels z^n est un nombre imaginaire pur.

EXERCICE 8 :

On donne dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0 \qquad (1)$$

1. Vérifier que (1) admet une solution imaginaire pure z_0 puis résoudre cette équation.

2. Montrer que les solutions sont les trois premiers termes d'une suite géométrique $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme z_0. Déterminer le 15^e terme.

3. Déterminer n pour que $z_n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 9 :

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (12-5i)z - 15 - 9i$

1. Montrer que P(z) admet une racine imaginaire pure z_0.

2. Déterminer les autres racines z_1 et z_2 de P(z) sachant que $|z_1| < |z_2|$

3. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soient A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a) Déterminer l'affixe du barycentre G du système :$\{(A,-1);(B,2);\ (C,2)\}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $-MA^2+2MB^2+2MC^2\ =5$.

EXERCICE 10 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : z^2 $-2z\sin\alpha+2(1+\cos\alpha)=0$ où $\alpha\in\,]-\pi;\pi[$.

Écrire les solutions sous forme trigonométrique.

2. Soit le nombre complexe $z=4\sqrt{2}(-1+i)$.

a)Déterminer les racines cubiques de z sous forme trigonométrique.

b) Les écrire sous forme algébrique. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

EXERCICE 11 :

Soit $\quad f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$,

$\quad z\mapsto\ z^4+2z^3+2z^2-2z+1$

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que : $\forall z\in\mathbb{C}^*$; $f(z)=\ z^2\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+a\left(z-\frac{1}{z}\right)+b\right]$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2+aZ+b=0$ puis l'équation $f(z)=0$.

3. Montrer que les points images des solutions de l'équation $f(z)=0$ sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 12 :

1. Soient les nombres complexes z et u définis par : $z=\ \sqrt{1+\sqrt{2}}\ +i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $u=\ z^4$.

Déterminer les racines quatrièmes de u sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

2. Calculer $\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)^4$ et déterminer les couples de nombres réels (a ; b) tels que :

$$(a+ib)^4=\frac{73}{16}-\frac{11\sqrt{3}}{2}i$$

EXERCICE 13 :

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. On donne les points A(-1-2i) et B(2+i). Déterminer l'affixe du point C dans les cas suivants :

a) ABC est un triangle rectangle isocèle de sens direct ; b) ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

2. Soit P et Q deux points d'affixes respectives p et q.

a) Démontrer qu'il existe un unique point M dont l'affixe z vérifie :

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right|\ =2\text{ et }\arg\left(\frac{z-p}{z-q}\right)\ \equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi].$$

b) Construire ce point et calculer son affixe lorsque : p = -4 +2i et b = 2 - i

EXERCICE 14 :

Dans le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 et f l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que zz' = 1.

1.a) Déterminer et construire l'image par f du point C d'affixe 1 + i.

b) Démontrer que pour tout point M et son image M', la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$ et que $OM \times OM' = OA^2$.

2. a) Vérifier que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$.

b) Soit I le milieu de $[MM']$. Démontrer que $IA \times IB = IM^2$ et que pour tout point M distinct de A et B, la droite (MM') est bissectrice de l'angle $\widehat{AIB}$.

EXERCICE 15 :

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ -{2} dans $\mathbb{C}$ qui à tout élément de z de $\mathbb{C}$ -{2} associe le nombre complexe $f(z) = \frac{3iz+1-3i}{z-2}$.

On appelle M le point d'affixe z ; A le point d'affixe $1+\frac{1}{3}i$ et B le point d'affixe 2.

1. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que $|f(z)| = 3$.
2. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que f(z) soit un nombre réel.
3. Déterminer l'ensemble (E_3) des points M tels que f(z) soit un nombre imaginaire pur.
4. On désigne par r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$

a) Déterminer l'affixe du point C = r(A) puis celle du point J = r(I) où I est le milieu de [AB].

b) Déterminer les images r des ensembles (E_1) et(E_2).

EXERCICE 16 :

1°/ Soit f, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$

a)Trouver les deux nombres réels *a* et *b* tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$f(z) = (z^2+4)(z^2+az+b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation f(z) = 0

c)Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces points sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2°/ Soit la suite des points M_n du plan complexe, d'affixes respectives définies par : $z_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$

a) Calculer le module et un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$

b) Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est réel. Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

c) Calculer le rapport $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$.

En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}|z_{n+1}|$.

EXERCICE 17 :

1°/ a) Déterminer sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité, c'est-à-dire les nombres complexes u tels que $u^6 = 1$.

b) Calculer $(1 - i)^6$.

c) En utilisant les questions a) et b) donner la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue z : $8z^6 + i = 0$.

2°/ On considère le nombre Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + yi$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

a) On note $Z = X + Yi$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire X et Y en fonction de x et y.

b) Au nombre complexe z on associe le point M(x, y) d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

EXERCICE 18 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

(F) : $z^4 - 2z^3(1 + \sqrt{3}) + 2z^2(3 + 2\sqrt{3}) - 4z(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$.

1°/ Démontrer que si le complexe z_0 est solution de l'équation (F) alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$ (c'est-à-dire $\overline{z_0}$ est aussi une solution de (F))

2°/ Vérifier que $z_0 = 1+i$ est solution de l'équation (F).

En déduire une seconde solution z_1 de l'équation

3°/ Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F).

4°/ Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F).

(Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm)

5°/ Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface.

EXERCICE 19 :

1°/ Le plan complexe est rapporté au du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A est le point d'affixe 1 ; B le point d'affixe 2i et C le point d'affixe z.

a)Que représentent géométriquement : $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$?

b) Dans la suite, on suppose que le point C d'affixe z est défini par : $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \alpha$ où

$\alpha \in]-\pi; 0]$ et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Calculer $\sin\alpha$.

c) Démontrer que : $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. En déduire le nombre complexe z et vérifier que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure.

2°/z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7+4i\sqrt{2}$

a) Vérifier que $u = \sqrt{2}+i$ est une solution de (E).

b) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

EXERCICE 20 :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, déterminer et représenter l'ensemble des points M(z) tels que :

a) $|z + \bar{z} - 1| = 4$;

b) $\arg(3i - z) \equiv 0[2\pi]$;

c) $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

d) $z\bar{z}+i(z - \bar{z}) -3 = 0$;

e) $(z\bar{z})^2 - z\bar{z} - 6 = 0$;

f) $(z-1-i)(\bar{z}-1+i) = 5$;

g) $z^2 - (1-2i)^2 = \bar{z}^2 - (1+2i)^2$

EXERCICE 21 :

1°/ Démontrer que si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, alors $Z = \frac{z+z'}{1+zz'}$ est un nombre réel. La réciproque est-elle vraie ?

2°/ Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M du plan d'affixe z ($z \neq 0$), on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

a)On pose que $z = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer en fonction de x et de y la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z'.

b) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M tels que M' soit sur l'axe des réels.

c) On suppose que M d'écrit le cercle de centre O et de rayon 2.

Montrer que z s'écrit sous la forme $z = 2e^{it}$ où $t \in [0; 2\pi[$. Exprimer x' et y' en fonction de t.

EXERCICE 22 :

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, soit A le point d'affixe 2i et f l'application du plan privé de A dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$.

1. Démontrer que f admet deux points invariants.

2. Démontrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

3. Démontrer que la droite $(O, \vec{e_2})$ privée de A est globalement invariante par f.

4.a) Démontrer que : $|z' - 2i||z - 2i| = 9$.

b) En déduire l'image par f du cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon r. Déterminer r pour que $(\mathcal{C})$ soit globalement invariant par f.

EXERCICE 23 :

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^{12} = 1$. Donner les solutions sous forme trigonométrique.

2°/ u désignant un nombre complexe différent de1, calculer en fonction de u^{n+1} et u la somme : $1 + u + u^2 + \ldots + u^n$

3°/ Donner les solutions de l'équation : $z^8 + z^4 + 1 = 0$ en utilisant les questions précédentes.

EXERCICE 24 :

1°/ A tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de z pour les quelles Z est défini.

b) Déterminer les ensembles des points M dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

- $|Z| = 1$
- Z soit un nombre réel
- Z soit un nombre imaginaire pur

2°/ On pose $\mathcal{E} = \mathbb{C} - \{i\}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; f est l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Soit M le point d'affixe z dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Déterminer les coordonnées du point B d'affixe z_0 telle que $f(z_0) = 1+2i$

b) Soit z un élément de $\mathcal{E}$. On désigne par r le module de z + i et θ une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de f(z) – i en fonction de r et de θ

c) Soit A le point d'affixe –i .

- Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M dont l'affixe z vérifie $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument f(z) – i.
- Montrer que B appartient à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.