

Exercice 1 : (5 pts)

1. Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions ci - dessous puis calcule les limites aux bornes du domaine dans chaque cas:

a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$; b. $g(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2 - x}$; c. $h(x) = \frac{x + 2}{2x - 6}$; d. $t(x) = \frac{1}{2}x - 4x^2$

2. Détermine la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$a(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x + 1$; $b(x) = \frac{2x + 1}{1 - 3x}$; $c(x) = (2x + 1)(x^3 - 6x + 1)$

Exercice 2 : (5 pts)

Monsieur TRAORE est un tailleur, il décide de confectionner un nouveau modèle de vêtement. Le premier vêtement confectionné lui est revenu à 7500F. Son expérience lui permet d'affirmer que le coût de confection unitaire augmente de 500F par vêtements supplémentaires.

- Quel est le coût de confection du deuxième vêtement? Du troisième vêtement ?
- On désigne par C_n le coût de confection du $n^{ième}$ vêtement. Exprime C_n fonction de n .
- Au combienième vêtement le coût de confection sera - t - il 10000F ?

Problème : (10 pts)

On considère la fonction définie par : $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

- Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
- Calcule les limites aux bornes de D_f .
- Calcule la fonction dérivée de la fonction.
 - Étudie les variations de f .
- Détermine une équation de la tangente à la courbe de (C) au point d'abscisse 3.
- Complète le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

- Trace (C) et (T) dans un repère orthonormé.

Exercice 1 :

1. Déterminons le domaine de définition et les limites aux bornes de ce domaine :

a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$

- Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

- La limite de f sur D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = 3(-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = 3(+\infty)^3 = +\infty$$

b. $g(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2 - x}$

- Domaine de définition :

$$D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 - x \neq 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$$

- La limite de f sur D_g :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = -3(-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2 - x} = \frac{3(2)^2 - 4(2) + 1}{2 - 2} = \frac{12 - 8 + 1}{0} = \frac{5}{0} = ?$$

Étudions le signe de $(2 - x)$

Posons : $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - x$	$+$	0	$-$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -3(+\infty) = -\infty$$

c. $h(x) = \frac{x + 2}{2x - 6}$

- Ensemble de définition de h :

$$D_h = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2x - 6 \neq 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2x \neq 6\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$$

- La limite de h sur D_h :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{2x - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{2x - 6} = \frac{3 + 2}{2(3) - 6} = \frac{3 + 2}{0} = \frac{5}{0}$$

Étudions le signe de $(2x - 6)$

Posons : $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x - 6$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d. $t(x) = \frac{1}{2}x - 4x^2$

- Domaine de définition : $D_t = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
- La limite de t sur D_t

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} t(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x - 4x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2) = -4(-\infty)^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x - 4x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^2) = -4(+\infty)^2 = -\infty$$

2. Déterminons la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- $a(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

$$a'(x) = 18x^2 - 4x + 4$$

- $b(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$

$$b'(x) = \frac{2(1-3x) - (-3)(2x+1)}{(1-3x)^2} = \frac{2-6x+6x+3}{(1-3x)^2} = \frac{5}{(1-3x)^2}$$

- $c(x) = (2x+1)(x^3-6x+1)$

$$c'(x) = 2(x^3-6x+1) + (3x^2-6)(2x+1) = 2x^3 - 12x + 2 + 6x^3 + 3x^2 - 12x - 6$$

$$c'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 24x - 4$$

Exercice 2 :

Soit C_1 le coût de la première confection : $C_1 = 7500F$ et la raison $r = 500F$.

1. Le coût de confection du deuxième vêtement et troisième vêtement :

$$C_2 = C_1 + 500 = 7500 + 500 = 8000F$$

$$C_3 = C_2 + 500 = 8000 + 500 = 8500F$$

2. C_n est le coût de confection du $n^{\text{ième}}$ vêtement.

Exprimons C_n en fonction de n :

(C_n) étant une suite arithmétique de raison $r = 500$ et premier terme $C_1 = 7500$

$$\text{Ainsi on a : } C_n = C_1 + (n-1)r \Rightarrow C_n = 7500 + (n-1) \times 500 \Rightarrow C_n = 7000 + 500n$$

3. La confection ou le coût vaut 1000

$$C_n = 1000 \Leftrightarrow 7000 + 500n = 1000 \Leftrightarrow 500n = 1000 - 7000 \Rightarrow n = \frac{3000}{500} = 6.$$

À la 6^{ième} confection du vêtement.

Problème :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

1. Déterminons l'ensemble de définition D_f de f .

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$$

2. Calculons les limites aux bornes de D_f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -(-\infty)^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -(+\infty)^2 = -\infty$$

3. a. Calculons la fonction dérivée de la fonction f .

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1-x^2).$$

b. Étudions les variations de f .

$$\text{Signe de } (1-x^2)$$

Posons $(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

Tableau de signe $f'(x)$:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

$\forall x \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[, f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante.

$\forall x \in]-1; 1], f'(x) \geq 0$ donc f croissante.

4. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 3.

$$(T) : y = f'(3)(x-3) + f(3)$$

$$f'(3) = -3(3)^2 + 3 = -27 + 3 = -24$$

$$f(3) = -(3)^3 + 3(3) - 2 = -27 + 9 - 2 = -20$$

$$\text{Donc } y = -24(x-3) - 20 \Leftrightarrow y = -24x + 72 - 20 \Leftrightarrow y = -24x + 52$$

$$(T) : y = -24x + 52$$

5. Complétons la tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	-4	-2	4	-4

6. Traçons la courbe (C) et (T) dans un repère orthonormé :

Les extrémums :

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) - 2 = 1 - 3 - 2 = -4$$

$$f(1) = -(1)^3 + 3(1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		-4		0	$-\infty$

