EPREUVE : ***Mathématiques*** **-** ***Série : TSE – STI*** **-** ***Durée : 4 heures*** **-** ***Coef : 4***

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages de 1/2 à 2/2. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les propriétés ou résultats demandés dans le sujet pourront être utilisés même si le candidat ne réussit pas leur démonstration. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 : .... (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un carré.

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de lexercice. **(0,5pt)**

2. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe Z_E de E. Construis E. **(1pt)**

3. Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - 4i$.
Soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1. **(1pt)**

4. On considère la similitude directe $\mathcal{S}$ qui transforme A en E et B en F.

- **a.** Exprime Z' en fonction de Z où Z' est l'affixe du point M' image de M par $\mathcal{S}$. **(1pt)**
- **b.** Détermine le centre Ω, l'angle θ et le rapport k de la similitude $\mathcal{S}$. **(1pt)**
- **c.** Détermine les images de C et D par $\mathcal{S}$. **(0,5pt)**
- **d.** Calcule l'aire de l'image par $\mathcal{S}$ du rectangle ABCD. **(1pt)**

Exercice 2: .... **(4 points)**

I. On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

1. La distance comprise entre deux arbres. **(0,5pt)**

2. Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ. **(1pt)**

II. On considère l'équation(E) : $11x - 26y = 1$ où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifie que le couple $(-7\,;\,-3)$est une solution de (E). **(0,5pt)**

2. Résous alors l'équation (E). **(1pt)**

3. En déduis le couple d'entiers relatifs $(p\,;q)$ solution de(E) tel que : **(1pt)**

Problème : .... (10 points)

A. A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures),on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta \,.\, Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montre qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$ **(1pt)**

2. Calcule la valeur de β, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près. **(1,5pt)**

3. Etudie le sens de variation de Q pour$t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan $\mathcal{P}$. **(1,5pt)**

4. Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près. **(1pt)**

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1. Détermine l'ensemble de définition de f. **(0,5pt)**

2. Etudie les variations de f. **(1 pt)**

3. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 2cm).
Montre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique dont précisera l'équation puis préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique. **(1,5pt)**

4. Montre que le point $I\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$ (0,75pt)

5. Donne une équation de la tangente en I à $(\mathcal{C})$. **(0,5pt)**

6. Construis $(\mathcal{C})$ **(0,75pt)**

EXERCICE 1 :

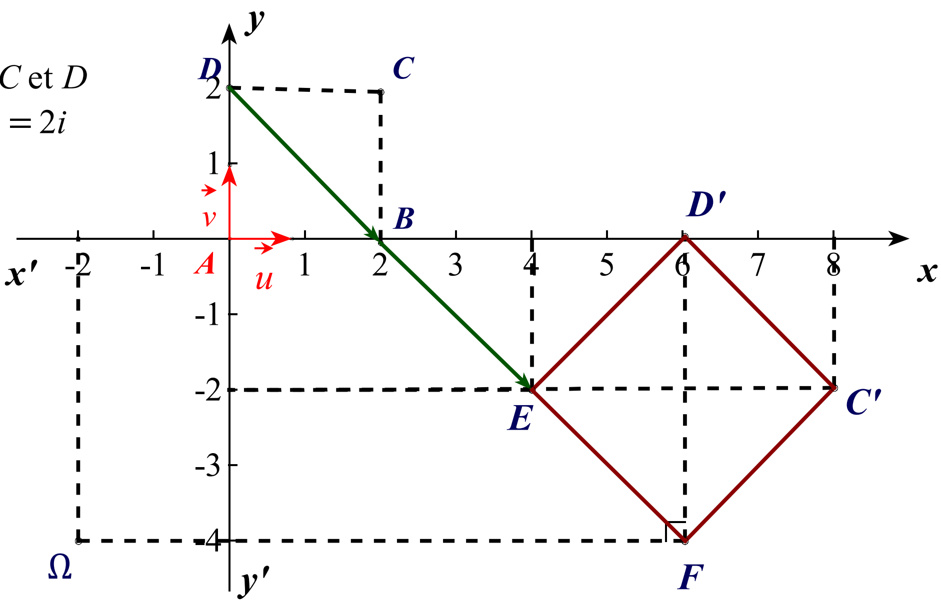
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(A\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm.

On considère les points B, C et D.

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$; $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$

1. Plaçons les points A, B, C et D

$Z_B = 2$, $Z_C = 2 + 2i$, $Z_D = 2i$



2. Déterminons l'affixe Z_E de E puis construisons E.

T translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$

Première méthode **:**

$T(B) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow Z_E - Z_B = Z_B - Z_D \Leftrightarrow Z_E = 2Z_B - Z_D \Rightarrow Z_E = 4 - 2i$

Deuxième méthode **:**

On sait que $T : Z + b$

$b = Z_{\overrightarrow{DB}} = Z_B - Z_D = 2 - 2i$

$T(B) = E \Leftrightarrow Z_E = Z_B + 2 - 2i \Leftrightarrow Z_E = 2 + 2 - 2i \Leftrightarrow Z_E = 4 - 2i.$

3. Déterminons les nombres réels a et b tel que $F = bar\{(A\,,a)\,;(B\,,b)\,;(C\,,1)\}$ avec $Z_F = 6 - 4i$

$F = bar\{(A\,,a)\,;(B\,,b)\,;(C\,,1)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{FA} + b\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ et $a + b + 1 \neq 0$

Première méthode**:**

$$Z_F = \frac{aZ_A + bZ_B + Z_C}{a+b+1} \Leftrightarrow 6 - 4i = \frac{2b+2+2i}{a+b+1} \Leftrightarrow 6 - 4i = \frac{2b+2}{a+b+1} + \frac{2}{a+b+1}i$$

Par identification :

$$\begin{cases} \dfrac{2b+2}{a+b+1} = 6 \; (1) \\ \dfrac{2}{a+b+1} = -2 \; (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -2 \\ -2a - 2b = 3 \end{cases}$$
$$\overline{\quad a \qquad = 1 \quad}$$

Dans (1) on a : $3 + 2b = -3 \Rightarrow b = -\dfrac{5}{2}$

Deuxième méthode **:** $\left(\textit{coordonnées du barycentre}\right)$

$$\begin{cases} x_F = \dfrac{ax_A + bx_B + x_C}{a+b+1} \\ y_F = \dfrac{ay_A + by_B + y_C}{a+b+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = \dfrac{2b+2}{a+b+1} \\ -4 = \dfrac{2}{a+b+1} \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = -\frac{5}{2}$$

4. S la similitude directe telle que : $S(A) = E$ et $S(B) = F$

a. Exprimons Z' en fonction de Z.

$$S : P \to P$$
$$M(Z) \mapsto M'(Z')$$

$S(A) = E \Leftrightarrow Z_E = \alpha Z_A + \beta$

$S(B) = F \Leftrightarrow Z_F = \alpha Z_B + \beta$

Par suite on a :

$$\begin{cases} \alpha \times 0 + \beta = 4 - 2i \\ 2\alpha + \beta = 6 - 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 - 2i \\ \alpha = \dfrac{6 - 4i - \beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 - 2i \\ \alpha = \dfrac{6 - 4i - 4 + 2i}{2} = 1 - i \end{cases}$$

d'où $Z' = (1-i)Z + 4 - 2i$

b. déterminons le centre Ω, l'angle θ et le apport k de S.

✓ $\alpha = 1 - i = \left[\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\right]$

$\theta = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$ et $k = \sqrt{2}$

✓ Le centre Ω

première méthode **:**

$$Z_\Omega = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{4-2i}{1-1+i} = -2-4i$$

Deuxième méthode **:** (Ω *point invariant*) :

$Z' = Z \Leftrightarrow Z = (1-i)Z + 4 - 2i \Leftrightarrow iZ = 4 - 2i \Rightarrow Z = -2 - 4i$

c. Déterminons les images de C et D par S.

Posons $C' = S(C)$ et $D' = S(D)$

$C' = S(C) \Leftrightarrow Z_{C'} = (1-i)Z_C + 4 - 2i = (1-i)(2+2i) + 4 - 2i = 8 - 2i$

$D' = S(D) \Leftrightarrow Z_{D'} = (1-i)Z_D + 4 - 2i = (1-i)(2i) + 4 - 2i = 6$

d. Calculons l'aire de l'image du rectangle $ABCD$ par S.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire du rectangle $ABCD$ et $\mathscr{A}'$ l'aire de son image par S

$\mathscr{A} = AB \times AD = 4 \text{ cm}^2$

$\mathscr{A}' = S(\mathscr{A}) = k^2\mathscr{A} = 2 \times 4 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$.

EXERCICE 2 :

I. $L = 525\ m$; $l = 285\ m$.

1. Calculons la distance comprise entre deux arbres:

La distance comprise entre deux arbres est le $PGCD(525\,;285) = 15$.

L'espace entre deux arbres est $15m$.

2. Calculons le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

Le périmètre du champ :

$P = 2(L + l) = 2(525 + 285) = 1620$; $P = 1620$

Le nombre d'arbres est : $n = \dfrac{P}{PGCD(525\,;285)} = \dfrac{1620}{15} = 108$

Nous avons 108 arbres.

II. On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$ où $x,y \in \mathbb{Z}$.

1. Vérifions que le couple $(-7\,;\,-3)$ est une solution de(E) :

$11(-7) - 26(-3) = -77 + 78 = 1$ donc le couple $(-7\,;\,-3)$ est une solution de (E).

2. Résolvons l'équation (E) :

Première méthode **:** $(Gauss)$

D'après $1°$) on a:

$$\begin{cases} 11x - 29y = 1 \\ \underline{11(-7) - 26(-3) = 1} \end{cases}$$

$$11(x+7) - 26(y+3) = 0 \Leftrightarrow 11(x+7) = 26(y+3)$$

$11 \wedge 26 = 1$ et $11/26(y+3)$ d'après Gauss il existe un entier relatif k tel que :

$y + 3 = 11k \Rightarrow y = 11k - 3$

$11 \wedge 26 = 1$ et $26/11(x+7)$ d'après Gauss il existe un entier relatif k tel que :

$x + 7 = 26k \Rightarrow x = 26k - 7$.

$S = \{(26k - 7\,;11k - 3)\ avec\ k \in \mathbb{Z}\}$

Deuxième méthode **:** $(\ congruence\ )$

$11x - 26y = 1 \Leftrightarrow 26y = 1 - 11k \Leftrightarrow 26y \equiv -1[11] \Leftrightarrow 4y \equiv -1[11] \Leftrightarrow y \equiv -3[11]$ ou

$y \equiv 8[11]$ donc $y = 11k - 3$ ou $y = 11k + 8$

Pour $y = 11k - 3$ on a :$11x - 26(11k - 3) = 1 \Leftrightarrow 11x = 26 \times 11k - 3 \times 26 + 1$

$\Leftrightarrow x = 26k - 7$

Pour $y = 11k + 8$ on a : $11x = 26 \times 11k + 209 \Leftrightarrow x = 26k + 19$

$S = \{(26k - 7\,;11k - 3)\ avec\ k \in \mathbb{Z}\}$ ou $S = \{(26k + 16\,;11k + 8)\ avec\ k \in \mathbb{Z}\}$

3. Déduisons - en le couple $(p\,;q)$ solution de(E) tel que $0 \le p \le 25$

D'après $2°$) on a : $p = 26k - 7$ et $q = 11k - 3$

$0 \le p \le 25 \Leftrightarrow 0 \le 26k - 7 \le 25 \Leftrightarrow 7 \le 26k \le 32 \Leftrightarrow \dfrac{7}{26} \le k \le \dfrac{32}{26} \Leftrightarrow 0{,}26 \le k \le 1{,}25$ donc

$k = 1$ et les valeurs de p et q sont : $q = 26 - 7 = 19$ et $q = 8$ d'où le couple $(p\,;q) = (19\,;8)$

PROBLEME :

A. On note $Q(t)$ la quantite de substance présente dans le sang à l'instant t.

$t = 0$; $Q(0) = 2{,}5$; $Q'(t) = -\beta \times Q(t)$

1. Montrons qu'ona $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$

$Q'(t) = -\beta Q(t) \Rightarrow Q(t) = Ce^{-\beta t}$

$Q(0) = 2{,}5 \Rightarrow C = 2{,}5$ d'où $Q(t) = 2{,}5\ e^{-\beta t}$

2. Calculons la valeur de β:

Première méthode **:**

$Q(t+1) = Q(t) - \dfrac{30}{100}Q(t) \Leftrightarrow Q(t+1) = 0{,}7 \times Q(t)$

Pour $t = 0$ on a :

$Q(1) = 0{,}7 \times Q(0) \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta t} = 0{,}7 \times 2{,}5 \Leftrightarrow e^{-\beta t} = 0{,}7 \Leftrightarrow -\beta = \ln 0{,}7 \Rightarrow \beta = -\ln 0{,}7$

Sa valeur approche est : $\beta = 0{,}3567$

Deuxième méthode :

$Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$

Pour $t = 1$ on a: $Q(1) = Q(0) - \frac{30}{100} \times Q(0) \Leftrightarrow Q(1) = 0{,}7 \times Q(0) \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta} = 0{,}7 \times 2{,}5$

donc $\beta = -\ln 0{,}7$ et sa valeur approche est : $\beta = 0{,}3567$

3. Etudions le sens de variation de Q pour $t \geq 0$

$D_Q = [0\,;+\infty[\ ;\ Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$

Q est continue et dérivable pour tout $t \geq 0$

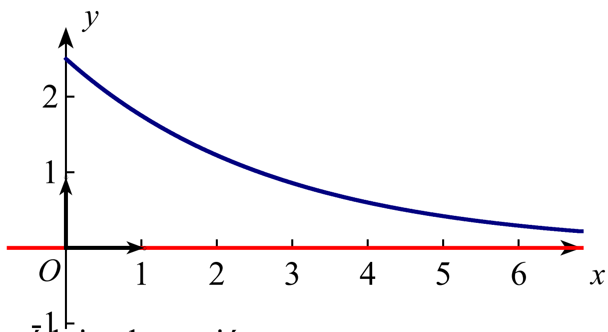
$Q'(t) = -2{,}5\beta e^{-\beta t}$.

$\forall\, t \geq 0$ $Q'(t) < 0$ alors Qest strictement décroissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} Q(t) = 0$

Tableau de variation et trace de la courbe (Γ)

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$Q'(t)$	$-$
$Q(t)$	$2{,}5 \searrow 0$



4. Le temps au bout duquel la quantité du sang est réduite de motié:

$Q(t) = \frac{1}{2} Q(0)$

$2{,}5e^{-\beta t} = \frac{1}{2} \times 2{,}5 \Leftrightarrow e^{-\beta t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\beta \times t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\beta} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 2}{\ln 0{,}7} = 1{,}94$

Le temps $t \approx 2$ *heures.*

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x défine par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1. Déterminons l'ensemble de définition de f.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \ et \left|\frac{x-1}{x}\right| \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{0\,;1\} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[\cup]1\ ;+\infty[$

2. Etudions les variation de f:

f est continue et dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition :

$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2 + x + 2x - 2x + 2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$.

Signe de $f'(x)$ .Posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$

$x_1 = -1\ ;\ x_2 = 2$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x(x-1)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

Pour tout $x \in]-\infty\,;-1] \cup]0\,;1[\cup [2\,;+\infty[$ $f$est décroisante.

Pour tout $x \in [-1;0[\cup]1;2]$ f est croissante.

3. Montrons que la courbe (C) admet une asymptote oblique:

Posons $y = -\dfrac{x}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$$

donc $(D): y = -\dfrac{x}{2}$ est l'asymptote à (C)

Position de (C) par rapport à (D).

Posons $f(x) - y = g(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$

Etudions g

Ensemble de définition de g : $D_g = D_f$.

Dérivée de g : $g'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x(x-1)}$

Les limites aux bornes de D_g:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to0} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||		$-$		||	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0

Le point remarquable : $(C_g) \cap (Ox) \Rightarrow \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = 0$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow |x-1| = |x| \Leftrightarrow (x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	

Position de (C) par rapport à (D) :

Pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]1;1/2]$ (C) est au - dessus de (D).

Pour tout $x \in [1/2, 1[\cup]1, +\infty[$ (C) est en - dessous de (D).

$(C) \cap (D) = \left\{\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)\right\}$

4. Montrons que le point $I\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie:

$2a - x = 1 - x$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 0$ et $-x \neq -1 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1$ et $1 - x \neq 0$ donc $(1 - x \in) D_f$.

$$f(1-x)+f(x)=\frac{x-1}{2}+\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|+\frac{x}{2}-\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|=-\frac{1}{2}$$

$f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}$ donc I est centre de symétrie.

5. Donnons une équation de la tangente en I à (C) :

$$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\Leftrightarrow y=-\frac{9}{2}x+2 \text{ d'où } (T_I) : y=-\frac{9}{2}x+2$$

6. Construissons la courbe (C) :

Les limites aux bornes de D_f :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Les extremums :

$f(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2=1{,}19\approx 1{,}2$; $f(2)=-1-\ln 2=-1{,}69\approx -1{,}7$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1,2$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-1{,}7$	$\searrow$	$-\infty$