

Exercice 1 : (6 Points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.$$

Partie A :

1. Montre que $-i$ est solution de (E).
2. Détermine les nombres réels a, b, c tels que; $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$
3. Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B :

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i; 4 - i; -i$

1. Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Soit r l'application du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$.

Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r .

Calcule l'affixe s de S .

3. Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle \mathcal{C} dont on déterminera le centre et le rayon. Trace \mathcal{C} .
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$.
 - a. Détermine les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C .
 - b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle \mathcal{C}' de centre P , d'affixe i . Détermine son rayon et trace \mathcal{C}' .
 - c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprime $|z' - i|$ en fonction de z .
 - d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle \mathcal{C} . Démontre que $|z' - 1| = 2\sqrt{5}$.
 - e. En déduis à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle \mathcal{C} .

Exercice 2 : (4 points)

- I. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.
 1. a. Donne une solution particulière de l'équation (E).
 - b. Résous l'équation (E).
 2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$
 - a. Montre que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).
 - b. Quel est le reste, dans la division de N par 40?
 3. a. Résous l'équation $8x + 5y = 100$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.
 - b. Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe?
- II. On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$ (E).
 1. Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} et f la fonction définie par : $f(x) = e^{2x}g(x)$.
Montre que f est solution de (E) si, et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

2. En déduis toutes les solutions de (E).

Problème : (10 points)

- A. 1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.
- On admet le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. En déduis la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.
 - Calcule $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - Résous l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - Étudie le sens de variation de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - Montre que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique notée α , dans l'intervalle $[e+1; e^3+1]$ puis étudie le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.

- Détermine $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ et prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.
- Calcule $\varphi'(x)$ et montre que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- Montre que φ est croissante sur l'intervalle $]1; \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha}; +\infty[$.

B. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.

- Vérifie que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.
- En déduis :
 - la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0;
 - la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$;
 - le sens de variation de f sur l'intervalle et le fait que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.
- Montre que, pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$ $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.
- Réproduis et complète le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

- Représente graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5cm en abscisse, 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α .

Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u} ; \vec{v})$. (Unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

Partie A :

1. Montrons que $-i$ est solution de (E).

$$-i \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow (-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = 0$$

$$(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = i - (-8+i) - 17i - 8 + 17i = i + 8 - i - 8 = 0.$$

donc $(-i)$ est une solution de (E).

2. Déterminons les nombres réels a, b, c tels que $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2 + bz + c)$.

Première méthode : Division euclidienne

$-i$ solution de (E) $\Leftrightarrow (z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i)$ est divisible par $(z+i)$

$$\begin{array}{r|l} z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i & z+i \\ \hline -z^3 - iz^2 & = z^2 - 8z + 17 \\ \hline -8z^2 + (17+i)z & \\ 8z^2 + 8iz & \\ \hline 17z + 17i & \\ -17z - 17i & \\ \hline 0 + 0 & \end{array}$$

donc $a = 1, b = -8, c = 17$ et $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

Deuxième méthode : Coefficients indéterminés

$$(z+i)(az^2 + bz + c) = az^2(z+i) + bz(z+i) + c(z+i) = az^3 + (ia+b)z^2 + (ib+c)z + ic$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ ia+b=-8+i \\ ib+c=17-8i \\ ic=17i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \\ c=17 \end{cases}$$

d'où $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

Troisième méthode : Tableau d'Hörner.

	1	$-8+i$	$17-8i$	$17i$
$-i$		$-i$	$8i$	$-17i$
	1	-8	17	0

donc $a = 1, b = -8, c = 17$ et $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

3. Résolvons l'équation (E) dans \mathbb{C} .

$$\text{Posons : } z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow z+i=0 \text{ ou } z^2 - 8z + 17 = 0$$

Résolution de : $z^2 - 8z + 17 = 0$

$$\Delta' = 16 - 17 = -1 = i^2$$

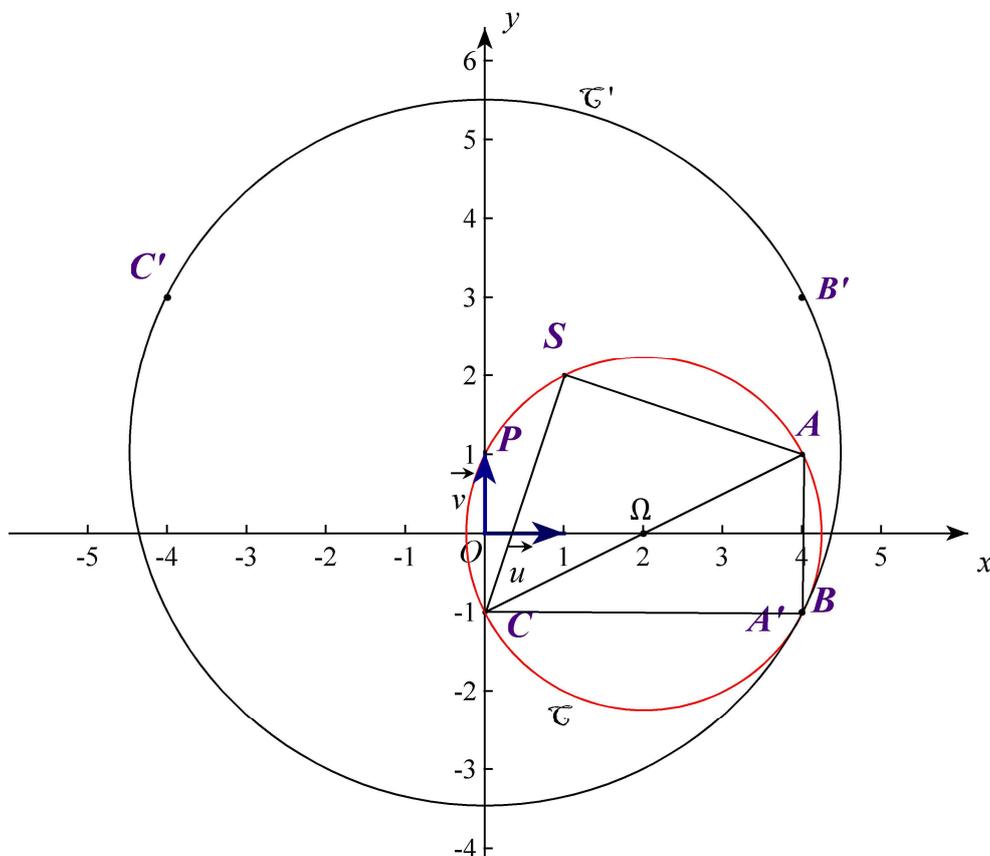
$$z_1 = 4 - i \text{ et } z_2 = 4 + i$$

$$S = \{-i; 4-i; 4+i\}$$

Partie B :

Soient les points : $A \mapsto z_A = 4 + i$, $B \mapsto z_B = 4 - i$; $C \mapsto z_C = -i$.

1. Plaçons les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice :



2. $r : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$M \mapsto M'$ tel que $z' = iz - 2i + 2$ où $M \mapsto z$ et $M' \mapsto z'$ le point $\Omega \mapsto z_\Omega = 2$.

$$S = r(A).$$

Calculons l'affixe s de S .

$$s = iz_A - 2i + 2 = i(4+i) - 2i + 2 = 2i + 1$$

$$s = 1 + 2i$$

3. Démontrons que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle Γ dont on déterminera le centre et rayon.

Première méthode :

par conjecture à partir de la représentation graphique, Ω semble être le centre de ce cercle. On cherche une preuve en comparant (**par calcul**) les distances $\Omega B; \Omega A, \Omega S$ et ΩC :

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |4 - i - 2| = |2 - i| = \sqrt{5}$$

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |4 + i - 2| = |2 + i| = \sqrt{5}$$

$$\Omega S = |z_S - z_\Omega| = |1 + 2i - 2| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$$

$$\Omega C = |z_C - z_\Omega| = |-i - 2| = \sqrt{5}$$

Donc B, A, S, C appartiennent au cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$

Deuxième méthode :

D'après la formule des points cocycliques, on vérifie : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \div \frac{z_A - z_S}{z_C - z_S} \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \div \frac{z_A - z_S}{z_C - z_S} = \left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right) \left(\frac{z_C - z_S}{z_A - z_S} \right) = \left(\frac{-i-4+i}{4+i-4+i} \right) \left(\frac{-i-1-2i}{4+i-i-2i} \right) = \frac{-2}{i} \times \frac{-1-3i}{3-i}$$

$$= 2i \times \frac{-i(3-i)}{3-i} = 2 \in \mathbb{R}^*. \text{ Donc } B, A, S, C \text{ appartiennent à un même cercle } \mathcal{C}.$$

Déterminons le centre et rayon de \mathcal{C} .

Première méthode :

Soit I le centre d'affixe $z = x + iy$ ($x; y$) $\in \mathbb{R}^2$.

$IA = IB = IC = IS = \text{rayon}$.

$$IA^2 = |z_A - z_B|^2 = |4 + i - x - iy|^2 = |(4-x) + i(1-y)|^2 = (4-x)^2 + (1-y)^2$$

$$IB^2 = |z_B - z_I|^2 = |4 - i - x - iy|^2 = (4-x)^2 + (1+y)^2$$

$$IC^2 = |z_C - z_I|^2 = |-i - x - iy|^2 = x^2 + (1+y)^2$$

$$IS^2 = |z_S - z_I|^2 = |1+2i - x - iy|^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2$$

Par égalités : on a

$$IC^2 = IB^2 \Leftrightarrow x^2 + (1+y)^2 = (4-x)^2 + (1+y)^2 \Leftrightarrow x^2 = (4-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - (4-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4+x)(x+4-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(2x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$IS^2 = IB^2 \Leftrightarrow (4-x)^2 + (1+y)^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2 \Leftrightarrow (4-2)^2 + (1+y)^2 = (1-2)^2 + (2-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2^2 + (1+y)^2 = (-1)^2 + (2-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 + 1 + 2y + y^2 = 1 + 4 - 4y + y^2$$

$$\Leftrightarrow 6y = 0 \Rightarrow y = 0$$

d'où $z_I = 2$.

Le rayon de ce cercle est :

$$IC = |z_C - z_I| = |-i - 2| = \sqrt{5} \text{ donc } \mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } I = \Omega \text{ de rayon } \sqrt{5}.$$

Deuxième méthode :

On vérifie que l'angle \widehat{CBA} est droit et on en déduit que $[AC]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC . Puis on détermine l'affixe du milieu I (coincide avec Ω) $[AC]$ et le rayon IA .

$$\text{mes} \left(\widehat{BA, BC} \right) = \text{Arg} \left(\widehat{CBA} \right) = \text{Arg} \left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right) = \text{Arg} \left(\frac{-i-4+i}{4+i-4+i} \right) = \text{Arg} \left(\frac{-4}{2i} \right) = \text{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2},$$

CBA est un triangle rectangle en B et I d'affixe $Z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4+i-i}{2} = 2 = z_\Omega$ donc \mathcal{C} est le

cercle circonscrit au triangle ABC par suite \mathcal{C} est le cercle de centre Ω et de rayon $\Omega A = \sqrt{5}$

4. À tout point $M \mapsto z$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$

a. Déterminons l'affixe des points A', B', C' associée respectivement aux points. A, B, C .

$$z_{A'} = \frac{iz_A + 10 - 2i}{z_A - 2} = \frac{i(4+i) + 10 - 2i}{4+i-2} = \frac{2i+9}{2+i} = \frac{1}{5}(9+2i)(2-i) = \frac{1}{5}(18+2+(4-9)i) = 4-i$$

$$z_{B'} = \frac{iz_B + 10 - 2i}{z_B - 2} = \frac{i(4-i) + 10 - 2i}{4-i-2} = \frac{11-2i}{2-i} = \frac{1}{5}(11-2i)(2+i) = \frac{1}{5}(22-2-(11+4)i) =$$

$$= 4+3i$$

$$z_{C'} = \frac{iz_C + 10 - 2i}{z_C - 2} = \frac{i(-i) + 10 - 2i}{-i-2} = \frac{11-2i}{-2-i} = \frac{1}{5}(11-2i)(-2+i) = \frac{1}{5}(-22+2+(11+4)i)$$

$$= -4 + 3i$$

b. Vérifions que A', B', C' appartiennent à un cercle \mathcal{C}' de centre P d'affixe i .

$A', B', C' \in \mathcal{C}'$ signifie que $PA' = PB' = PC' = \text{Rayon}$

$$PA' = |z_{A'} - z_P| = |4 - i - i| = |4 - 2i| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}.$$

$$PB' = |z_{B'} - z_P| = |4 + 3i - i| = |4 + 2i| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}.$$

$$PC' = |z_{C'} - z_P| = |-4 + 3i - i| = |-4 + 2i| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

donc \mathcal{C}' est le cercle de centre P et de rayon $r = 2\sqrt{5}$.

c. Pour tout nombre $z \neq 2$ exprimons $|z' - i|$ en fonction de z .

$$|z' - i| = \left| \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2} - i \right| = \left| \frac{iz + 10 - 2i - iz + 2i}{z - 2} \right| = \left| \frac{10}{z - 2} \right| = \frac{10}{|z - 2|}.$$

d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle \mathcal{C} .

Démontrons que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z - 2| = \sqrt{5} \text{ donc } |z' - i| = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \text{ (CQFD)}$$

e. Déduisons à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle \mathcal{C} .

$$|z' - i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow M' \text{ appartiennent au cercle de centre } P \text{ et de rayon } 2\sqrt{5}.$$

Exercice 2 :

1. On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$ où $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. a. Donnons une solution particulière de l'équation (E)

Première méthode : par essai

On constate que : $8(2) + 5(-3) = 16 - 15 = 1$ le couple $(2; -3) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution particulière de l'équation de l'équation (E) .

Deuxième méthode : Algorithme d'Euclide.

q	1	1	1	1
8	5	3	2	1
r	3	2	1	0

$$1 = 3 - 2 \times 1$$

$$2 = 5 - 3 \times 1$$

$$3 = 8 - 5 \times 1$$

$$3 - 2 = 1 \Leftrightarrow 3 - (5 - 3) = 1 \Leftrightarrow 2(3) - 5 = 1 \Leftrightarrow 2(8 - 5) - 5 = 1 \Leftrightarrow 8(2) + 5(-3) = 1 \text{ donc } (2; -3) \text{ est une solution particulière.}$$

Troisième méthode : Par congruence.

$$8x + 5y = 1 \Leftrightarrow 8x = -5y + 1 \Leftrightarrow 8x \equiv 1[5]$$

$$\Leftrightarrow 3x \equiv 1[5]$$

$$\Leftrightarrow 6x \equiv 2[5]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow x = 5k + 2 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

pour $k = 0$ on a : $x = 2$ et $-5y = 8(2) - 1 \Leftrightarrow -5y = 15 \Rightarrow y = -3$ donc $(2; -3)$ est une solution particulière.

b. Résolvons l'équation (E)

Première méthode :

Comme $(2; -3)$ est une solution particulière, on a le système.

$$\begin{cases} 8x + 5y = 1 \\ 8(2) + 5(-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 1 \\ 8(-2) + 5(3) = -1 \end{cases}$$

$$\underline{8(x-2) + 5(y+3) = 0}$$

$$\Leftrightarrow 8(x-2) = 5(-y-3)$$

$8 \wedge 5 = 1$ alors $5/(x-2)$ et $8/(-y-3)$ par suite

$$x = 5k + 2 \text{ et } y = -8k - 3 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

vérification: $8(5k+2) + 5(-8k-3) = 40k + 16 - 40k - 15 = 1$

donc l'ensemble des solutions est $S = \{(5k+2; -8k-3), k \in \mathbb{Z}\}$

Deuxième méthode :

$$8x + 5y = 1 \Leftrightarrow 8x = -5y + 1 \Leftrightarrow 8x \equiv 1[5]$$

$$\Leftrightarrow 3x \equiv 1[5]$$

$$\Leftrightarrow 6x \equiv 2[5]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 2[5]$$

$$\Rightarrow x = 5k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation :

$$8(5k+2) + 5y = 1 \Leftrightarrow 40k + 16 + 5y = 1 \Leftrightarrow 5y = -40k - 15 \Rightarrow y = -8k - 3$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{(5k+2; -8k-3), k \in \mathbb{Z}\}$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe un couple $(a; b) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases} .$$

a. Montrons que le couple $(a; -b)$ est solution de (E) .

Première méthode :

On sait que :

$$N = N \Leftrightarrow 8a + 1 = 5b + 2 \Leftrightarrow 8a - 5b = 2 - 1 \Leftrightarrow 8a + 5(-b) = 1 \Rightarrow (a; -b) \text{ est une solution de } (E).$$

Deuxième méthode :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases} .$$

$$N = 8a + 1 \Rightarrow a = \frac{N-1}{8}$$

$$N = 5b + 2 \Rightarrow b = \frac{N-2}{5} \Rightarrow -b = -\frac{N-2}{5}$$

Vérifions si $(a; -b)$ est solution de (E) .

$$8\left(\frac{N-1}{8}\right) + 5\left(-\frac{N-2}{5}\right) = N - 1 - N + 2 = 1 \text{ d'où } (a; -b) \text{ est solution de } (E).$$

b. Le reste de la division euclidienne de N par 40.

D'après la relation qui vérifie N , on a :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases} .$$

D'après 2) a), $(a; -b)$ solution de (E) , par suite

$$\begin{cases} a = 5k + 2 \\ -b = -8k - 3 \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5k + 2 \\ b = 8k + 3 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

En remplaçant a ou b par leur valeur, on a :

$$N = 8(5k+2) + 1 = 40k + 17, k \in \mathbb{Z}$$

ou $N = 5(8k + 3) + 2 = 40k + 17$ d'où $N = 40k + 17$, $k \in \mathbb{Z}$

$N = 40k + 17$, $k \in \mathbb{Z}$ d'où le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.

3. a. Résolvons l'équation $8x + 5y = 100$ où $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.

$8 \wedge 5 = 1$ et $1/100$, donc l'équation admet au moins une solution.

Première méthode : Par congruence :

$$8x + 5y = 100 \Leftrightarrow 5y = 100 - 8x \Leftrightarrow 5y \equiv 100[8] \Leftrightarrow y \equiv 20[8] \Leftrightarrow y \equiv 4[8] \Rightarrow y = 8k + 4, k \in \mathbb{Z}$$

Remplaçons y par sa valeur dans l'équation :

$$8x + 5(8k + 4) = 100 \Leftrightarrow 8x = -40k + 80 \Rightarrow x = -5k + 10.$$

$$S = \{(-5k + 10; 8k + 4), k \in \mathbb{Z}\}$$

Deuxième méthode : Par application du théorème de Bézout.

D'après 1°) on a :

$8(2) + 5(-3) = 1 \Leftrightarrow 8(200) + 5(-300) = 100$ donc le couple $(200; -300)$ est une solution particulière de l'équation $8x + 5y = 100$.

$$\begin{cases} 8x + 5y = 100 \\ 8(200) + 5(-300) = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 100 \\ 8(-200) + 5(300) = -100 \end{cases}$$
$$\frac{8(x - 200) + 5(y + 300) = 0}{\Leftrightarrow 8(x - 200) = 5(-y - 300)}$$

$8 \wedge 5 = 1$ alors on a $5/(x - 200)$ et $8/(-y - 300)$ par suite :

$$5/(x - 200) \text{ et } 8/(-y - 300) \Rightarrow x = 5k + 200 \text{ et } y = -8k - 300$$

Vérification : $8(5k + 200) + 5(-8k - 300) = 40k + 1600 - 40k + 1500 = 100$ donc :

$$S = \{(5k + 200; -8k - 300) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

b. Soient α le nombre d'hommes et β le nombre de femmes :

D'après l'énoncé, on a : $8\alpha + 5\beta = 100$

Avec la question précédente :

Avec la première méthode on a : $\alpha = -5k + 10$ et $\beta = 8k + 4$

pour $k = 0$ ou $k = 1$: $(\alpha = 10 \text{ et } \beta = 4)$ ou $(\alpha = 5 \text{ et } \beta = 12)$.

Avec la deuxième méthode : $\alpha = 5k + 200$ et $\beta = -8k - 300$

$$5k + 200 > 0 \text{ et } -8k - 300 > 0$$

$$5k + 200 > 0 \Rightarrow k > -40$$

$$-8k - 300 > 0 \Rightarrow k < -\frac{300}{8} \text{ d'où } -40 < k < -\frac{300}{8} \Rightarrow k \in \{-39; -38\}.$$

Pour $k = -39$ on a : $\alpha = 5$ et $\beta = 12$

Pour $k = -38$ on a : $\alpha = 10$ et $\beta = 4$

II. On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$ (E).

1. Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} et f la fonction définie par : $f(x) = e^{2x}g(x)$.

Montrons que la fonction f est solution (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

Supposons que f est solution de (E) et montrons que $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

$$f \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow f' - 2f = \frac{-2}{1 + e^{-2x}} \Leftrightarrow 2e^{2x}g(x) + g'(x)e^{2x} - 2e^{2x}g(x) = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow g'(x)e^{2x} = \frac{-2}{1 + e^{-2x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

2. Déduisons toutes les solutions de (E).

Déterminons la fonction g

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx = \ln(1+e^{-2x}) + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{La solution } f(x) = e^{2x}(\ln(1+e^{-2x}) + c) = e^{2x}\ln(1+e^{-2x}) + ce^{2x}.$$

Problème :

A. 1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

a. On admet le resultat suivant : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

Déduisons la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

- Ensemble de définition de g : $D_g = \{x \in \mathbb{R}, x-1 > 0\} \cap]1; +\infty[=]1; +\infty[$
- Posons $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$
 quand $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow t \rightarrow 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2(t+1) - t \ln t] = 2$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$.

b. Calculons $g'(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

$$g'(x) = 2 - \ln(x-1) - 1 = 1 - \ln(x-1).$$

c. Résolvons l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$ d'inconnue $x \in]1; +\infty[$.

Première méthode : Par étude.

Posons : $h(x) = 1 - \ln(x-1)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$

- Dérivée h' :

$$h'(x) = -\frac{1}{x-1} < 0 \text{ pour tout } x \in]1; +\infty[$$
- Les limites aux bornes de $]1, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty ;$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$
- Tableau de variation

x	1	$e+1$	$+\infty$
$h'(x)$		-	
$h(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

- Les points remarquables :
 $\mathcal{C}_h \cap (Ox) \Rightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = e \Rightarrow x = e+1$.
 D'après le tableau de variation de h , pour tout $x \in]1; e+1[$ $h(x) > 0$ d'où $S =]1; e+1[$.

Deuxième méthode : Utilisation de la bijection de la fonction exponentielle.

$$1 - \ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x-1) > -1 \Leftrightarrow \ln(x-1) < 1 \Rightarrow x-1 < e \Rightarrow x < e+1 \text{ donc } x \in]1; e+1[\cap]1; +\infty[=]1; e+1[\text{ Par suite : } S =]1; e+1[$$

Troisième méthode : Par changement d'inconnue.

Posons $t = x - 1$, l'inéquation devient $1 - \ln t > 0$.

Signe de $(1 - \ln t)$

$$\text{Posons } 1 - \ln t = 0 \Leftrightarrow \ln t = 1 \Rightarrow t = e.$$

t	0	e	$+\infty$
$1 - \ln t$		0	
	+	-	

Dans le tableau ci - dessus pour tout $t \in]0; e[$, $1 - \ln t > 0 \Leftrightarrow (x-1) \in]0; e[$,
 $1 - \ln(x-1) > 0$

$(x-1) \in]0; e[\Leftrightarrow 0 < x-1 < e \Leftrightarrow 1 < x < e+1 \Rightarrow x \in]1; e+1[$ d'où $S =]1; e+1[$.

d. Étudions le sens de variation de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$

Signe de $g'(x)$:

x	1	$e+1$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

$\forall x \in]1; e+1[$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante.

$\forall x \in [e+1; +\infty[$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante.

e. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique notée α , dans l'intervalle $[e+1; e^3+1]$.

La limite en $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - (x-1)\ln(x-1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \left(1 - \frac{1}{x} \right) \ln(x-1) \right) \\ &= +\infty(2 - \infty) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

L'extremum :

$$g(e+1) = 2(e+1) - (e+1-1)\ln(e+1-1) = 2e+2 - e = e+2 ; g(e+1) = e+2$$

Tableau de variations

x	1	$e+1$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	2	$e+2$	0	$-\infty$

D'après le tableau de variation de g , sur l'intervalle $[e+1; +\infty[$ g est définie, continue et strictement décroissante donc g réalise une bijection de $[e+1; +\infty[$ sur $]-\infty; e+2]$. Or $0(\text{zéro}) \in]-\infty; e+2]$ donc il existe un nombre réel $\alpha \in [e+1; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On sait que: $[e+1; e^3+1] \subset [e+1; +\infty[$, calculons :

$$g(e+1) = e+2 > 0 ,$$

$$g(e^3+1) = 2(e^3+1) - (e^3+1-1)\ln(e^3+1-1) = 2e^3+2 - 3e^3 = -e^3+2 < 0$$

$g(e+1) \times g(e^3+1) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $e+1 < \alpha < e^3+1$.

• Étudions le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Première méthode : Par lecture du tableau de variation de g .

D'après le tableau de variation de g :

Pour tout $x \in]1; \alpha[$ $g(x) > 0$

Pour tout $x \in [\alpha; +\infty[$ $g(x) \leq 0$

Deuxième méthode : Avec le tableau de variation de g :

x	1	$e+1$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			$e+2$	$-\infty$
signe de $g(x)$		+	0	-

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$

a. Déterminons $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$ et prouvons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = ?$

Posons $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$

quand $x \rightarrow +\infty$; $t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln \left(\frac{1-t^2}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t (\ln(1-t^2) - 2 \ln t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln(1-t^2) - 2t \ln t) = 0 \end{aligned}$$

b. Calculons $\varphi'(x)$.

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1} \times x - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

Montrons que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur $]1; +\infty[$.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $x^2(x^2-1) > 0$ donc $\varphi'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$ a le même signe que $g(x^2)$

c. Montrons que φ est croissante sur l'intervalle $]1; \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha}; +\infty[$.

Posons $t = x^2$ ($t > 0$), d'après la question 1°/e) on a :

Pour $t \in]1; \alpha[$ ($g(t) \geq 0$) donc $1 \leq x^2 \leq \alpha$ et $x \in]1; +\infty[\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{\alpha}$, $g(x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) \geq 0$ d'où φ est croissante.

Pour $t \in [\alpha; +\infty[$ ($g(t) \leq 0$) donc $x^2 \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\alpha}$ et $x \in]1; +\infty[\Leftrightarrow x \in [\sqrt{\alpha}; +\infty[$ $g(x^2) \leq 0 \Rightarrow \varphi'(x) \leq 0$ d'où φ est décroissante.

B. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$

1. Vérifions que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $f(x) = \varphi(e^x)$.

$$\varphi(e^x) = \frac{\ln((e^x)^2 - 1)}{e^x} = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = f(x)$$

2. deduisons – en :

a. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = -\infty.$$

b. La limite $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

$$\text{Posons } t = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{t}$$

quand $x \rightarrow +\infty$; $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} t \ln\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} t (\ln(1 - t^2) - 2\ln t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (t \ln(1 - t^2) - 2t \ln t) = 0$$

c. le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = (\varphi(e^x))' = \varphi'(e^x) \times e^x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, e^x > 0 \text{ donc } f'(x) \text{ a le signe que } \varphi'(e^x)$$

$$\text{Posons } e^x = t \Rightarrow t \in]0; +\infty[$$

$$\forall t \in]1; \sqrt{\alpha}], \varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0, \ln(\sqrt{\alpha})], \varphi'(e^x) \geq 0 \text{ donc } f \text{ est croissante sur }]0, \ln(\sqrt{\alpha})]$$

$$\forall t \in [\sqrt{\alpha}; +\infty[\varphi'(t) \leq 0 \Leftrightarrow \forall x \in [\ln(\sqrt{\alpha}); +\infty[, \varphi'(e^x) \leq 0 \text{ donc } f \text{ est décroissante sur } [\ln(\sqrt{\alpha}); +\infty[.$$

Tableau de variation de f :

x	0	$\ln(\sqrt{\alpha})$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$f(\ln(\sqrt{\alpha}))$	0

3. Montrons que, pour tout $x \in]0; +\infty[; f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \leq f(\ln \sqrt{\alpha})$$

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(e^{2\ln \sqrt{\alpha}} - 1)}{e^{\ln \sqrt{\alpha}}} = \frac{\ln(e^{\ln \alpha} - 1)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}.$$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha - 1) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1} \text{ donc } f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$$

4. Reproduisons et complétons le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$	-1,36	0,33	0,68	0,66	0,54	0,30

5. Représentons graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unité 5 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α .

