ÉPREUVE : Mathématiques - Série : TSE-STI - Durée : 4 heures - Coef : 4

Exercice 1 : .... (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}\,;\vec{v}\right)$ (unité graphique: 5cm) , on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

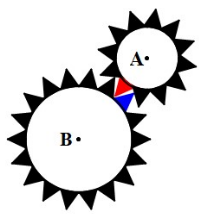
On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $[0\,;2\pi[$. On considère l'application qui à tout point M de (C), associe $f(M) = MA \times MB$..
   a. Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.
   b. Montre l'égalité suivante: $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)e^{i\alpha} \right|$.
   c. En déduis l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$
3. a. En utilisant 2.c, montre qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.
   b. En utilisant 2.c, montre qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

Exercice 2 : .... (4 pts)

I. Une roue d'engrenage (A) a douze dents.

   a. Elle est en contact avec une roue (B) de 18 dents. Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?



   b. est maintenant en contact avec une roue dentée (C), ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de (A), les deux roux sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position

   Détermine le nombre de dents de la roue (C).

II. On considère un triangle du plan.

1. a. Détermine et construis le point G , barycentre de $\{(A;1)\,;(B;\,-1)\,;(C\,;1)\}$.
   b. Détermine et construis le point G' , barycentre de $\{(A;1)\,;(B\,;5)\,;(C\,;\,-2)\}$
2. a. Soit J le milieu de $[AB]$

   Exprime $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduis l'intersection des droites (GG') et (AB).

   b. Montre que le barycentre I de $\{(B\,;2)\,;(C\,;-1)\}$ appartient à (GG').

3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$. Détermine trois réels a,d et c tels que K soit barycentre de $\{(A;a);(D;d);(C;c)\}$.

Problème : .... (10 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le repère $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)>0$.
2. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x+\sin x$.

   b. En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$

   c. Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x}\leq f(x)\leq 3e^{1-x}$.

   b. En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. a. Montre que, sur l'intervalle $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique α.

   b. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Représente la courbe C sur $[0;\pi]$.

Partie B

On veut calculer l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $t=1$

1. Montre que $A=2e-2+\int_0^1\left(e^{1-t}\cos t\right)dt$
2. On pose $I=\int_0^1\left(e^{1-t}\cos t\right)dt$ et $J=\int_0^1\left(e^{1-t}\sin t\right)dt$

   a. À l'aide de deux intégrations par parties, montre que :

   $I=e-J-\cos 1$ et $J=I-\sin 1$.

   b. En déduis la valeur de I.
3. Détermine la valeur exacte deen unités d'aire, puis donne une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=-1-\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. a. Montre que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   b. Calcule la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1+\ln 3)$.

2. a. Détermine $\ln(f(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b. Étudie le sens de variation de la fonction H.

   c. Détermine le tableau de variation de H.

3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $x \longmapsto 1-x+\ln(2+\cos x)$. On ne demande pas de représenter Γ. On appelle Δ la droite d'équation $y=-x+1$.

   a. Étudie la position relative de Γ et de Δ.

   b. Détermine les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4. a. Établis une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   b. Étudie la position relative de Γ et T.

5. Montre que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

Exercice 1 :

Le plan P est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$. Unité graphique 5 cm.

$A \mapsto Z_A = 1 + i$ et $B \mapsto Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On considère le cercle de centre O et de rayon $r = 1$.

1. Donnons la forme trigonométrique de Z_A et Z_B.

1ère méthode :

$$Z_A = 1 + i = \frac{\sqrt{2}^2}{2}(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ d'où}$$

$$Z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2ème méthode :

Module et argument de Z_A :

$$|Z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Soit $\theta_A = Arg(Z_A)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_A = \dfrac{\pi}{4}$

La forme trigonométrique de Z_A. : $Z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Module et argument de Z_B :

$$|Z_B| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit $\theta_B = Arg(Z_B)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_B = \dfrac{3\pi}{4}.$

La forme trigonométrique de Z_B : $Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C), d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0\,;2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point de (C), associe $f(M) = MA \times MB$.

a. Montrons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.

1ère Méthode :

$$e^{i2\alpha} - 1 = e^{i2\alpha} - e^{0} = e^{i\alpha+i\alpha} - e^{i\alpha-i\alpha} = e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = e^{i\alpha}\left(2i\sin\alpha\right) = 2i\sin\alpha . e^{i\alpha}.$$

2ème méthode :

$$\begin{aligned} e^{i2\alpha} - 1 &= \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 1 + 2i\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2i^2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = 2i\sin\alpha(i\sin\alpha + \cos\alpha) \\ &= 2i\sin\alpha\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = 2i\sin\alpha\, e^{i\alpha}. \end{aligned}$$

3ème méthode :

On sait que $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

$$2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 2i \times e^{i\alpha} \times \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = e^{i2\alpha} - 1$$

b. Montrons l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha} \right|$

$$\begin{aligned} f(M) &= \left|Z_A - Z_M\right| \times \left|Z_B - Z_M\right| = \left|\left(Z_A - Z_M\right)\left(Z_B - Z_M\right)\right| \\ &= \left|Z_A Z_B - Z_M\left(Z_A + Z_M\right) + Z^2{}_M\right| = \left| -\frac{1}{2}(1+i)(1-i) - e^{i\alpha}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) + e^{2i\alpha}\right| \\ &= \left| -1 - e^{i\alpha}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) + e^{i\alpha}\right| = \left| e^{i2\alpha} - 1 - e^{i\alpha}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right| \end{aligned}$$

d'où $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - e^{i2\alpha}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right|$.

c. Déduisons que : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

$$\begin{aligned} f(M) &= \left| e^{i2\alpha} - 1 - e^{i2\alpha}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right| = \left| 2i\sin\alpha\, e^{i\alpha} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right| \\ &= \left|e^{i\alpha}\right| \times \left| 2i\sin\alpha - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right| = 1 \times \left| -\frac{1}{2} + i\left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)\right| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2} \end{aligned}$$

3. a. Montrons qu'il existe 2 points M de (C) dont on donnera les coordonnées pour lesquels $f(M)$ est minimale.

Soit g la fonction à variable réelle α associée à f définie par $g(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

Étudions la fonction g :

Dérivée de la fonction g.

$$g'(\alpha) = \frac{2(2\cos\alpha)\left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}} = \frac{\cos\alpha(-3 + 4\sin\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}}.$$

Signe de $g'(\alpha)$

$\forall\ \alpha \in [0\,;2\pi[\,,\ \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2} > 0$ d'où $g'(\alpha)$ a le même signe que $\cos\alpha(-3+4\sin\alpha)$.

Posons $\cos\alpha(-3+4\sin\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=0$ ou $-3+4\sin\alpha=0$

$\cos\alpha=0 \Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

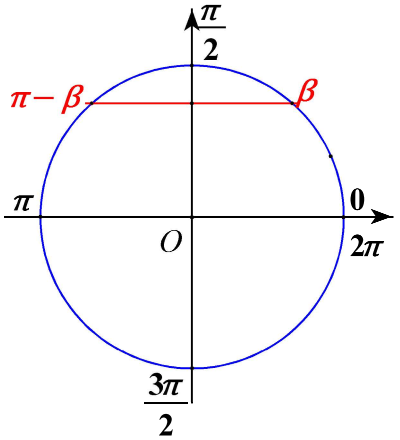
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow 0^2+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1 \Longrightarrow \sin\alpha=-1$ ou $\sin\alpha=1$

$-3+4\sin\alpha=0 \Leftrightarrow 4\sin\alpha=3 \Longrightarrow \sin\alpha=\frac{3}{4}\in[-1\,;1]$ donc il existe un angle $\beta\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ telque $\sin\beta=\frac{3}{4}$.

$$\sin\alpha=\sin\beta \Longrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta+2k\pi\\ ou \\ \alpha=\pi-\beta+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{9}{16} \Longrightarrow \cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4} \text{ ou } \cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Tableau de signe :



Pour tout $\alpha\in[0\,;\beta]\cup[\pi-\beta\,;2\pi]$, $\sin\alpha\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow -3+4\sin\alpha\le 0$

Pour tout $\alpha\in[\beta\,;\pi-\beta]$, $\sin\alpha\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow -3+4\sin\alpha\ge 0$

Pour tout $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $\cos\alpha\ge 0$

pour tout $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]\cos\alpha\le 0$

D'après le cercle trigonométrique on a :

α	0		β		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\beta$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos\alpha$		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$-3+4\sin\alpha$		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Les extremums

$$g(\beta)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin\beta)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+3)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$g(\pi-\beta)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin(\pi-\beta))^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin\beta)^2}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\left(-3+4\sin\frac{\pi}{2}\right)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3-4)^2}{4}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Tableau de variation de g :

α	0		β		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\beta$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(\alpha)$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$

D'aprés le tableau de variation de g, $f(M)$ admet deux points de (C) de coordonnées respectives $\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$et $\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$ où $f(M)$ est minimal. Cette valeur minimale est $1/2$.

2ème *méthode* :

$f(M)$ est minimale si et seulement si $\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2=0$

$\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2=0 \Leftrightarrow 2\sin\alpha=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{3}{4}$.

Soit $\beta\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\beta=\frac{3}{4}$

$\sin\alpha=\sin\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ou $\alpha=\pi-\beta$.

La valeur minimale de $f(M)$ est $\frac{1}{2}$.

b. D'après le tableau de variation de g :

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)<g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ dont il existe un seul point M de (C) de coordonnées $(0\,;\,-1)$. Cette valeur maximale est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 :

I. a. Le nombre de tours de chaque roue pour la première fois dans leur position initiale :

1ère *méthode* :

Soient x le nombre de tours de la roue (A) et y le nombre de tours de la roue (B) :

On l'équation : $12x=18y$.

Résolution par la congruence :

$12x=18y \Leftrightarrow 2x=3y \Leftrightarrow 2x\equiv 0[3] \Leftrightarrow x\equiv 0[3] \Rightarrow x=3k$.

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation :

$2(3k)=3y \Rightarrow 2k=y$

Pour $k=1 \Rightarrow x=3$ et $y=2$

Résolution par la méthode de Gauss :

$12x=18y \Leftrightarrow 2x=3y$

On sait que $2\nmid 3$ d'après Gauss $3|x$ et $2|y \Rightarrow x=3k$ et $y=2k$.

Pour $k=1 \Rightarrow x=3$ et $y=2$.

2ème *méthode* :

Roue A a 12 dents et Roue B a 18 dents.
le nombre de tours des roues :
$PPCM(A\,;B) = PPCM(12\,;18)$
$12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2^2 \times 3^2$
$PPCM(12\,,36) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36.$
Soient x et y le nombre de tours respectif de A et B
$12x = 36 \Rightarrow x = \dfrac{36}{12} = 3$
$18y = 36 \Rightarrow y = \dfrac{36}{18} = 2$

3ème *méthode* : par la table de valeurs

Nombre de tours	1	2	3	
Roue A	12	24	36	
Roue B	18	36		

Donc 3 tours de la roue A et 2 tours de la roue B, les deux roues sont dans leur position initiale pour la première fois

b. Le nombre de dents de la roue (C)

1ère *méthode* :
Soit k le nombre de dents de la roue (C) et N le nombre de tours de (C) qui a permis la première coïncidence avec (A).
D'après le rapport de proportion, on a :
$\dfrac{N}{10} = \dfrac{12}{k}$ (avec N et 10 premiers entre eux car la roue (A) fait 10 tours).
$\dfrac{N}{10} = \dfrac{12}{k} \Rightarrow N \times k = 120 = 1 \times 2^3 \times 3 \times 5$.
Dans cette factorisation les seuls nombres premiers avec 10, sont 1 et 3. On en déduit donc que: $N = 1$ et $k = 120$ ou bien $N = 3$ et $k = 40$.

2ème ***méthode* :**
On désigne par :
$d_A =$ nombre de dents de A et $t_A =$ nombre de tours de A
$d_C =$ nombre de dents de C et $t_C =$ nombre tours de C
Lorsque les roues A et B coincident de nouveau à leur point de départ : $d_A \times t_A = d_C \times t_C$
Les roues A et C coindent de nouveau pour la première fois à partir de $t_A = 10$. d'où $d_C \times t_C = 120$
Par décomposition on a :
$120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 8 \times 15$
Donc $\mathrm{d}_C \in \{\ 120, 60, 40, 24, 20, 15\ \}$
Les conditions étant que $\mathrm{d}_C > 12$ et les deux roues se rencontrent pour la première fois à partir de t_A=10, alors PPCM ($\mathrm{d}_C, \mathrm{d}_A$) = 120 c'est - à - dire (d_C, 12) = 120.
D'où $\mathrm{d}_C = 120$ ou $\mathrm{d}_C = 40$ sont les valeurs cherchées.

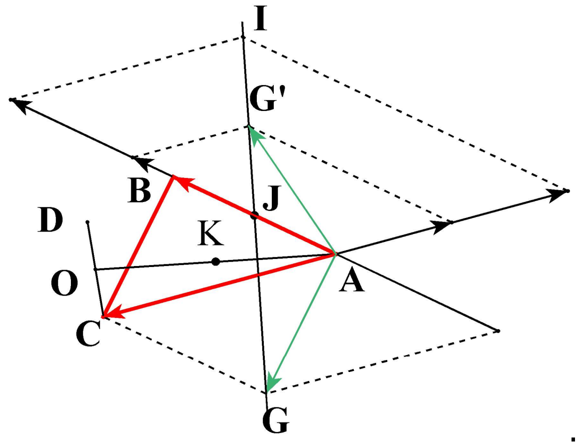
II. On considère un triangle ABC du plan.

1. a. Déterminons et construisons le point $G = bary\{(A\,;1)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;1)\}$. On a :
$G = bary\{(A\,;1)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$
$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ $(Voir\ figure\ ci-\ dessous)$.

b. Déterminons et construisons le point $G' = bary\{(A\,;1)\,;(B\,;5)\,;(C\,;-2)\}$. On a :

$G' = bary\{(A;1);(B;5);(C;-2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} = \vec{O}$

$\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.(*Voir figure ci − dessous*)



2. a. Soit J le milieu de $[AB]$.

J milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JA} = \vec{O}$ ou $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exprimons :

- $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

  $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} = -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} = -\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où

  $\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

- $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

  $\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AG'} = -\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AG'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où

  $\overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

- Déduisons l'intersection des droites (GG') et (AB).

  1ère ***méthode :***

  Considérons le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

  L'équation de la droite (GG').

  $\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{GG'}\begin{pmatrix}9/4\\3/2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

  $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

  Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (GG')$ tel que dét$\left(\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GG'}\right) = 0$

  dét$\left(\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GG'}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+1 & 9/4\\ y-1 & -3/2\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}(x+1) - \frac{9}{4}(y-1) = 0$

  $\Leftrightarrow 2(x+1) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0$

  d'où $(GG') : 2x + 3y = 1$.

  Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, (AB) a pour équation la droite $y = 0$.

  On a, le système :

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=0 \end{cases} \text{ donc } (GG') \cap (AB) = \left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

2ème *méthode :*

$\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = 3\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{JG'}$ donc $J \in (GG')$ et $J \in (AB)$ d'où $(GG') \cap (AB) = \{J\}$

b. Montrons que le barycentre $I = bary\{(B;2),(C;-1)\} \in (GG')$.

Coordonnées du point *I.*

1ère *méthode* :

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ d'où $I\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vérifions que : $I \in (GG')$.

$I \in (GG') \Longrightarrow 2x_I + 3y_I = 1$

$2x_I + 3y_I = 2(2) + 3(-1) = 4 - 3 = 1$ vraie donc $I \in (GG')$

2ème *méthode :*

$I = bary\{(B;2),(C;-1)\} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JI} + 3\overrightarrow{IG'}$

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{G'G} \Longrightarrow \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{IB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI}$

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI}$$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BI}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{JI}$$

$= \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{JG'} + 3\overrightarrow{G'I}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GG'} + 3\overrightarrow{G'I}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GG'} + 3\overrightarrow{G'I} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{G'I}$ d'où $I \in (GG')$

3ème *méthode :*

$I = bary\{(B;2),(C;-1)\} \Leftrightarrow I = bary\{(B;6),(C;-3)\}$

$G = bary\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$

$$G' = bary\{(A;1);(B;5);(C;-2)\} \Leftrightarrow G' = bary\left\{\underbrace{(A;1),(B;-1);(C;1)}_{G}\ \underbrace{(B;6),(C;-3)}_{I}\right\}$$

$$\Leftrightarrow G' = bary\{(G;1),(I;3)\}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{G'G} = 3\overrightarrow{G'I}, \text{ d'où } I \in (GG')$$

3. Soit D un point quelconque du plan.

O milieu du segment $[CD] \Leftrightarrow \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{O}$

K milieu du segment $[OA] \Leftrightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{KA} = \vec{O}$.

Déterminons trois réels a, d et c telsque K soit barycentre de $\{(A;a),(C;d),(C;c)\}$

1ère ***méthode* :**

$K = bary\{(A;a),(D;d),(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{KA} + d\overrightarrow{KD} + c\overrightarrow{KC} = \vec{O}$.

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}\right)$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD}\right)+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD}\right)+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)-\overrightarrow{KC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow -2\left(-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)-4\overrightarrow{KC}=2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KC}-2\overrightarrow{KD}-4\overrightarrow{KC}=-\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{KA}$$

$$\Leftrightarrow\ -2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KC}=\vec{O}$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KC}=\vec{O}$ par identification : $a=2$;$d=c=1$.

2ème *méthode* :

$K=bary\{(A;a),(C;d),(C;c)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{KA}+d\overrightarrow{KD}+c\overrightarrow{KC}=\vec{O}.$

K milieu de $[OA]\Leftrightarrow\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KA}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OK}$ ①

O milieu de $[CD]\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$ ②

$$①+②\Rightarrow\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KD}=\vec{O}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{O}.$$

Par identification on a : $a=2$; $d=c=1$

Problème :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et $\left\|\vec{i}\right\|=4$ cm et $\left\|\vec{j}\right\|=2$ cm..

Partie A :

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}.$

(C) la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Montrons que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

   On sait que :

   $\forall x\in\mathbb{R},\ -1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow 1\le 2+\cos x\le 3\Rightarrow 2+\cos x>0$ et $e^{1-x}>0$ d'où $f(x)>0$.

2. a. Montrons que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x.$

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$
$$=\cos x+\sin x.$$

D'où $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

b. Déduisons - en que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$.

1ère ***méthode :***

On a : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\cos x+\sin x\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{2} \leq 2+\cos x+\sin x \leq 2+\sqrt{2}$$

d'où $2+\cos x+\sin x>0$

$2^{ème}$ ***Méthode :***

$$2+\cos x+\sin x=2+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)>0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

d'où $2+\cos x+\sin x>0$

c. Montrons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons f' :

$f'(x)=-\sin x\times e^{1-x}-(2+\cos x)e^{1-x}=-(2+\cos x+\sin x)e^{1-x}$.

Signe de $f'(x)$

D'après la question précédente , pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$ et $-e^{1-x}<0$ donc $f'(x)<0$ par suite f est strictement décroissante.

3. a. Montrons que, tout pour $x\in\mathbb{R}$, $e^{1-x}\leq f(x)\leq 3e^{1-x}$.

On sait que : $-1\leq \cos x\leq 1 \Leftrightarrow 1\leq 2+\cos x\leq 3 \Leftrightarrow e^{1-x}\leq(2+\cos x)e^{1-x}\leq 3e^{1-x}$

d'où $e^{1-x}\leq f(x)\leq 3e^{1-x}$.

b. Déduisons - en les limites :

- en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{1-x}\leq \lim_{x\to-\infty} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

- en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x}\leq \lim_{x\to+\infty} f(x)\leq \lim_{x\to+\infty} 3e^{1-x} \Leftrightarrow 0\leq \lim_{x\to+\infty} f(x)\leq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

c. Interprétons géomériquement le resultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

4. a. Montrons que, sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique

$1^{ère}$ ***méthode* :**

Posons $g(x)=f(x)-3$

Étudions la fonction g :

- Dérivée : $g'(x)=f'(x)<0$
- Les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-3)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3)=-3$$

- Tableau de variation de g :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ -3

D'après le tableau de variation de g, sur $\mathbb{R}$, g est définie, continue et strictement décroissante, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-3;+\infty[$. $0\in\ ]-3;+\infty[$ alors il existe une solution unique $\alpha\in\mathbb{R}$, par suite léquation $f(x)=3$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$.

$2^{ème}$ ***méthode :***

f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$ alors elle réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ vers $[f(M)\,;f(0)]=[e^{1-\pi},3e]$. Or $3\in[e^{1-\pi},3e]$, il existe donc une et une seule solution $\alpha\in[0\,;\pi]$ telle que $f(x)=3$.

b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

$g(0)=3e-3>0$ et $g(\pi)=e^{1-\pi}-3<0 \Longrightarrow g(0)\times g(\pi)\leq 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire $\alpha\in[0\,;\pi]$.

Encadrement d'ordre zéro :

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	0,15	$-0,46$	$-2,43$		

Encadrement d'ordre un :

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$g(x)$	0,37	3,63	2,32	1,92	1,74	1,21	0,73	0,29	- 0,10

Encadrement d'ordre 2 :

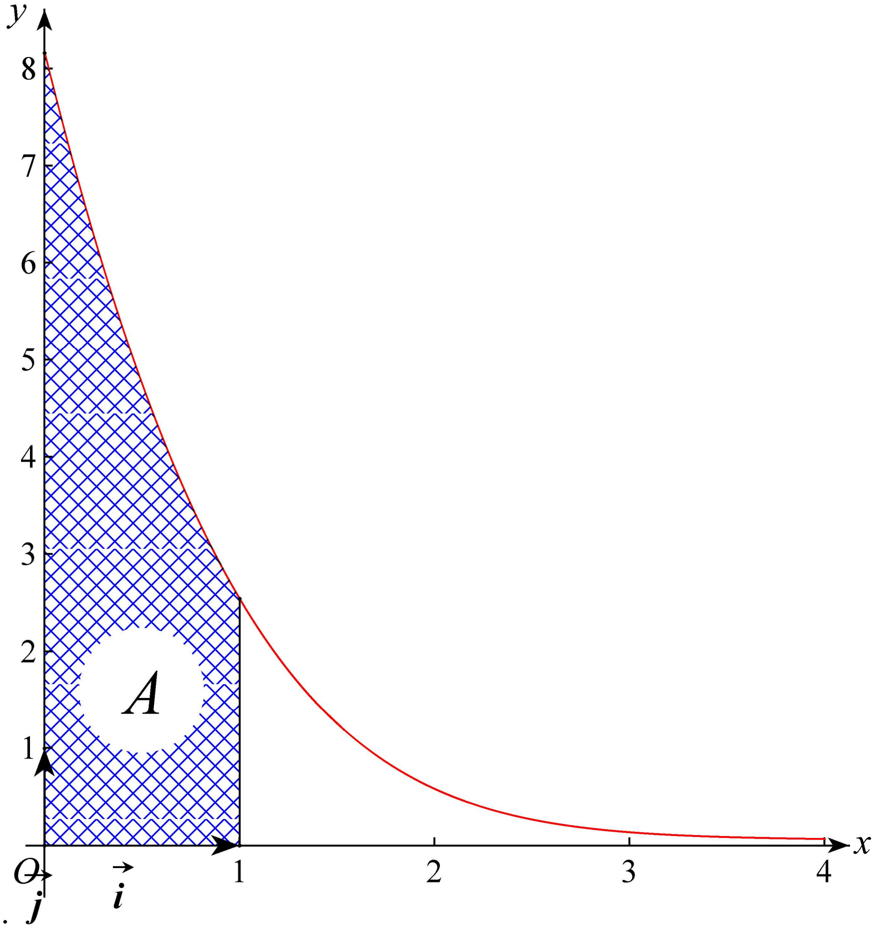
x	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88
$g(x)$	0,25	0,21	0,17	0,13	0,09	0,05	0,01	0,01	- 0,03

D'où $0,87\leq\alpha\leq 0,88$.

5. Représentons la courbe (C) sur $[0\,;4]$.

Tableau de variation de f :

x	0 $\qquad\qquad$ 4
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$3e \searrow (2+\cos 4)e^{-3}$



Partie B :

On veut Calculer l'aire A, exprimée en unité d'aire, du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $t=1$:

$A=\int_0^1 |f(t)|dt\times Ua=\int_0^1 f(t)dt\times Ua.$

1. Montrons que $A=\left(2e-2+\int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt\right)\times Ua.$

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(2+\cos t)e^{1-t}dt=2\int_0^1 e^{1-t}dt+\int_0^1 \cos x\,e^{1-t}dt$$

$$=-2\int_0^1 -e^{1-t}dt+\int_0^1 \cos t\,e^{1-t}dt$$

$$=-2\left[e^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 \cos x\,e^{1-t}dt=-2+2e+\int_0^1 \cos x\,e^{1-t}dt$$

d'où $A=\left(2e-2+\int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt\right)\times Ua.$

2. On pose $I=\int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt$ et $J=\int_0^1 e^{1-t}\sin t\,dt$.

   a. À l'aide d'intégration par parties, montrons que : $I=e-j-\cos 1$ et $J=I-\sin 1$.

   - $I=\int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt=?$

     Posons :

     $u=\cos t\Longrightarrow u'=-\sin t$

     $v'=e^{1-t}\Longrightarrow v=-e^{1-t}$

     $I=\left[-\cos t\,e^{1-t}\right]_0^1-\int_0^1 e^{1-t}\sin t\,dt=-\cos 1+e-J$ d'où $I=e-j-\cos 1$

- $J = \int_0^1 e^{1-t}\sin t\, dt = ?$

  Posons :

  $u_1 = \sin t \Longrightarrow u_1' = \cos t$

  $v_1' = e^{1-t} \Longrightarrow v = -e^{1-t}$

  $J = [-\sin t\, e^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-t}\cos t\, dt = -\sin 1 + I = I - \sin 1.$

b. Déduisons - en la valeur de *I*.

$I = e - J - \cos 1 = e - (I - \sin 1) - \cos 1$

$I = -I + \sin 1 - \cos 1 + e$

$2I = e + \sin 1 - \cos 1 \Longrightarrow I = \dfrac{1}{2}(e + \sin 1 - \cos 1).$

3. Déterminons la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donnons une valeur approché de A à 10^{-2} par défaut.

$$A = \int_0^1 f(x)d\,x \times Ua = \left[2e - 2 + \frac{1}{2}(e + \sin 1 - \cos 1)\right] \times 8\text{cm}^2$$

$$= (16e - 16 + 4 + e + 4\sin 1 - 4\cos 1)\text{cm}^2$$

$$= (20e + 4\sin 1 - 4\cos 1 - 16)\ \text{cm}^2$$

$$= 39{,}57\ \text{cm}^2.$$

Partie C :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. a. Montrons que la fonction h admet des primitive sur $\mathbb{R}$.

Ensemble de définition de h : $D_h = \mathbb{R}$

On sait que $\sin x$ et $2 + \cos x$ sont continues $\mathbb{R}$ donc $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. h est définie et continue sur$\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives.

b. Calculons la primitive H de la fonction h, qui prend en zéro la valeur $(1 + \ln 3)$.

$H(x) = \int_0^1 h(x)d\,x = \int_0^1 \left(-1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}\right)dx = -x + \ln|2 + \cos x| + c$ donc

$H(x) = -x + \ln(2 + \cos x) + c$

$H(0) = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow -0 + \ln(2 + \cos 0) + c = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow \ln 3 + c = 1 + \ln 3 \Longrightarrow c = 1.$

$H(x) = -x + 1 + \ln(2 + \cos x).$

2. a. Déterminons $\ln(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(f(x)) = \ln((2 + \cos x)) = \ln(2 + \cos x) + \ln e^{1-x} = \ln(2 + \cos x) + 1 - x$ donc :

$\ln(f(x)) = -x + 1 + \ln(2 + \cos x).$

b. Étudions le sens de variation de la fonction H.

Dérivée de H :

$H'(x) = h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x} = \dfrac{-2 - \cos x - \sin x}{2 + \cos x} = \dfrac{-(2 + \cos x + \sin x)}{2 + \cos x}$

D'après la partie A, 2°) c) on a : $-(2 + \cos x + \sin x) < 0$ donc $H'(x) < 0$ d'où H est strictement décroissante.

c. Tableau de variation de H.

Les limites aux bornes de H.

On constate que : $H(x) = \ln(f(x))$.

$\lim_{x \to -\infty} H(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(f(x)) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} H(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(f(x)) = -\infty$

Tableau de variation de H :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$H'(x)$	$-$
$H(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

3. La fonction définie par : $x \mapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$, (Δ) la droite d'équation $y = 1 - x$.
   a. Étudions la position relative de (Γ) et de (Δ)
   Signe de $(H(x) - y)$.
   $H(x) - y = 1 - x + \ln(2 + \cos x) - (-x + 1) = \ln(2 + \cos x)$
   $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(2 + \cos x) \geq 0 \Longrightarrow H(x) - y \geq 0$ d'où (Γ) est au dessus de (Δ).
   b. Déterminons les abscisses des points communs de Γ et Δ.
   $H(x) = y \Leftrightarrow \ln(2 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Longrightarrow x = (2k + 1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4. a. Établissons une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0.
   $x_0 = 0,\ H(0) = 1 + \ln 3,\ H'(0) = -1$
   $(T) : y = -1(x) + 1 + \ln 3 \Leftrightarrow (T) : y = -x + 1 + \ln 3$.
   b. Étudions la postion relative de (Γ) et (T) :
   $H(x) - y = 1 - x + \ln(2 + \cos x) - (-x + 1 + \ln 3) = \ln(2 + \cos x) - \ln 3 = \ln\left(\frac{2 + \cos x}{3}\right)$
   On sait que , pour tout x $\in \mathbb{R}$ $1 \leq 2 + \cos x \leq 3 \Longrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{2 + \cos x}{3} \leq 1$ donc $\ln\left(\frac{2 + \cos x}{3}\right) \leq 0$ d'où
   (Γ) est en dessous de (T).
5. La courbe (Γ) est continue dans la bande du plan limitée par les droites (Δ) et (T) car $(\Delta) // (T)$.