EXAMEN : *Baccalauréat malien* **BAC 2015**

SÉRIE : *TSExp* SESSION : ***Juin 2015***

ÉPREUVE : *Mathématiques* DURÉE : *3heures* COEF : 3

Exercice 1 / [*5 points*]

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$

1°/ a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017. **(0,5pt)**

b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n. **(1pt)**

2°/ On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\ 000 - X_n$

a) Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme. **(1pt)**

b) Exprimer U_n en fonction de n, en déduire X_n en fonction de n **(1pt)**

c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ? **(1pt)**

d) Calculer la limite de la suite (X_n). Conclure **(0,5pt)**

Exercice 2 / [*7 points*]

I-/ Soit f une fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est définie et dérivable sur IR.
- $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
- $\forall x \in]-\infty\ ; 0[\cup]2\ ; +\infty[$, $f'(x) > 0$; $\forall x \in]0\ ; 2[$, $f'(x) < 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$

1°/ Dressez le tableau de variation de f. **(0,5pt)**

2°/ $(\mathcal{C}_f)$ représentant les variations de f, précisez les équations des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ **(0,5pt)**

3°/ Précisez le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,5pt)**

4°/ Tracez dans le même repère $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes. **(1pt)**

5°/ Donnez l'ensemble de définition des fonctions définies par : $\ln(f(x))$ et $\dfrac{1}{f(x)}$ où ln désigne le logarithme népérien. **(1pt)**

II-/ Soient les nombres complexes $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

1°/ Écrire z_1, z_2 et $\dfrac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique. **(1,5pt)**

2°/ Montrez qu'il existe deux suites géométrique (U) et (V) telles que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles. **(2pts)**

Problème / [*8 points*]

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = x + \dfrac{2(1+\ln x)}{x}$.

1°/ a) Déterminez l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes de cet ensemble. **(1pt)**

b) On considère la fonction h définie sur $]0\ ; +\infty[$ par $h(x) = x^2 - 2\ln x$:

- Étudiez les variations de h sur $]0\ ; +\infty[$. **(1pt)**

- En déduire le signe de $h(x)$ sur$]0\,;+\infty[$. **(0,5pt)**

c) Étudiez les variations de f ; dressez son tableau de variation. **(1,5pt)**

d) Prouvez que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}f)$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. **(0,5pt)**

2°/ a) Tracez la courbe $(\mathcal{C}f)$ et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ **(1pt)**

b) On désigne par $\mathcal{A}(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}f)$, Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calculez $\mathcal{A}(k)$. **(1,5pt)**

c) Pour quelle valeur de k a-t-on $\mathcal{A}(k) = 8$? **(1pt)**

Correction du Bac Session de Juin 2015 Série : TSExp

Exercice1 :

Le nombre de pieds d'arbres au cours de l'année 2015 est : $X_0 = 50\,000$

1°/ a) –Le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 est :

$X_1 = X_0 - \frac{5}{100}X_0 + 3\,000 = 0{,}95X_0 + 3\,000 = 0{,}95 \times 50\,000 + 3\,000 = 50\,500$ $(\mathbf{0,25})$

–Le nombre d'arbres qu'il aura en 2017 est :

$X_2 = X_1 - \frac{5}{100}X_1 + 3\,000 = 0{,}95X_1 + 3\,000 = 0{,}95 \times 50\,500 + 3\,000 = 50\,975$ $(\mathbf{0,25})$

b) Exprimons X_{n+1} en fonction de X_n :

$X_{n+1} = X_n - \frac{5}{100}X_n + 3\,000 = 0{,}95X_n + 3\,000$ $(\mathbf{1})$

2°/ La suite (U_n) est définie par : $U_n = 60\,000 - X_n$

a) Montrons que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme :

$U_n = 60\,000 - X_n$

$U_{n+1} = 60\,000 - X_{n+1} = 60\,000 - \left(0{,}95X_n + 3\,000\right) = 57\,000 - 0{,}95X_n$

$\quad = 0{,}95\left(60\,000 - X_n\right) = 0{,}95U_n$ $(\mathbf{0,50})$

D'où (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ $(\mathbf{0,25})$ et de premier terme

$U_0 = 60\,000 - X_0 = 10\,000$ $(\mathbf{0,25})$

b) Exprimons U_n en fonction de n déduisons en X_n en fonction de n :

$U_n = U_0q^n \Leftrightarrow U_n = 10\,000(0{,}95)^n$ $(\mathbf{0,50})$

$U_n = 60\,000 - X_n \Leftrightarrow X_n = 60\,000 - U_n = 60\,000 - 10\,000(0{,}95)^n$ $(\mathbf{0,50})$

c) Le nombre d'arbres fruitiers dans 20ans est :

$X_{20} = 60\,000 - 10\,000(0{,}95)^{20} = 56\,415{,}14 \simeq 56\,415$ $(\mathbf{1})$

d) Calculons :

$\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[60\,000 - 10\,000(0{,}95)^n\right] = 60\,000$; ($|0{,}95| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}95)^n = 0$) $(\mathbf{0,25})$

Pour une longue durée le nombre d'arbres ne dépasse pas 60 000 pieds. $(\mathbf{0,25})$

Exercice2 :

I-/ $D_f = \mathbb{R}$; $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[,\ f'(x) > 0$; $\forall\, x \in\,]0\,;\,2[,\ f'(x) < 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x + 2] = 0$

1°/ Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0		$+$		
$f(x)$	0^+	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$(\mathbf{0,50})$

2°/ Précisons les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$:

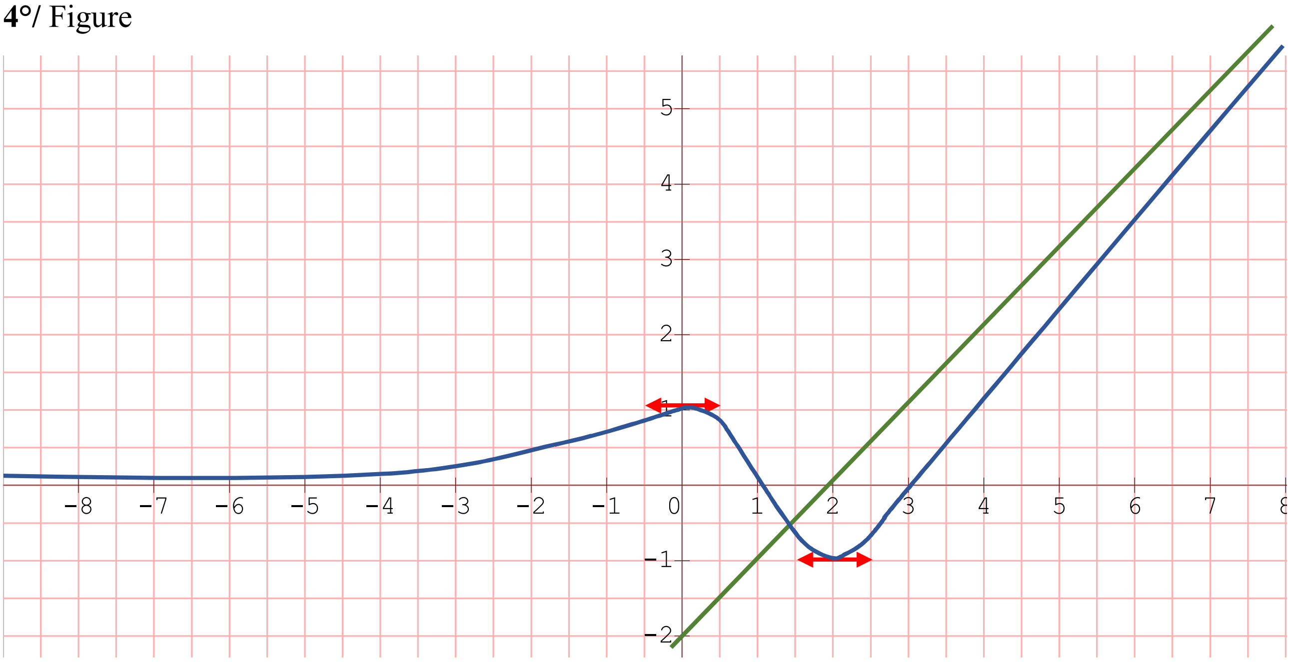
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \Rightarrow y = 0$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ $\mathbf{(0,25)}$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x + 2] = 0^+ \Rightarrow y = x - 2$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ $\mathbf{(0,25)}$

3°/ Précisons le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

$\forall\, x \in \,]-\infty\ ;\ 1] \cup [3\ ;\ +\infty[\,,\ f(x) \geq 0$ $\mathbf{(0,25)}$; $\forall\, x \in [1\ ;\ 3]\,,\ f(x) \leq 0$ $\mathbf{(0,25)}$

4°/ Figure



$\mathbf{(1)}$

5°/ Donnons l'ensemble de définition de fonctions $\ln(f(x))$ et $\frac{1}{f(x)}$:

$D_{\ln(f(x))} = \{x\ /x \in \mathbb{R}\,; f(x) > 0\,\} \Rightarrow D_{\ln(f(x))} = \,]-\infty\ ;\ 1[\, \cup\,]3\ ;\ +\infty[$ $\mathbf{(0,50)}$

$D_{\frac{1}{f(x)}} = \{x\ /x \in \mathbb{R}\,; f(x) \neq 0\,\} \Rightarrow D_{\frac{1}{f(x)}} = \mathbb{R} - \{1\ ;\ 3\}$ $\mathbf{(0,50)}$

II-/ Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$

1°/ Écrivons z_1 , z_2 et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique :

$|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$; soit θ_1 un argument de z_1 : $\begin{cases} cos\theta_1 = \frac{1}{2} \\ sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}$ $\mathbf{(0,50)}$

$|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$; soit θ_2 un argument de z_2 : $\begin{cases} cos\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right)$ $\mathbf{(0,50)}$

$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = 2 \qquad \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{z_2}{z_1} = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$ $\mathbf{(0,50)}$

2°/ Montrons qu'il existe deux suites géométriques (U) et (V) telles que : $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles :

Soit (W_n) une suite géométrique vérifiant les conditions : $W_2 = z_1$ et $W_4 = z_2$

$W_n = W_0 q^n$

$W_2 = W_0 q^2 \ \Rightarrow\ W_0 q^2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $W_4 = W_0 q^4 \ \Rightarrow\ W_0 q^4 = -\sqrt{3} + i$

$$\frac{W_0q^4}{W_0q^2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{2(-\sqrt{3}+i)(1 - i\sqrt{3})}{4} \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2i \ \color{red}{\mathbf{(0,50)}}$$

Soit $q = x + iy$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = 2 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2)$ donne $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Dans (3) : pour $x = 1$; $y = 1$; pour $x = -1$; $y = -1$

Donc $q = 1 + i$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$ ou $q = -1 - i$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$

Pour $q = 1 + i$, on a : $W_0 = \dfrac{W_2}{q^2} = \dfrac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{2i} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$

Sachant que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ d'où il existe une suite géométrique (U) de premier terme $U_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$de raison $q = 1 + \boldsymbol{i}$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$

et une suite géométrique (V) de premier terme $V_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$ de raison $q = -1 - i$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$

Problème :

La fonction numérique f est défie par : $f(x) = x + \dfrac{2(1+lnx)}{x}$

1°/ a) Déterminons l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes de D_f :

$D_f = \{x \ / x \in \mathbb{R} \ ; \ x > 0 \text{ et } x \neq 0\} \implies D_f =]0 \ ; \ +\infty[$ $\color{red}{\mathbf{(0,50)}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$

b) On considère la fonction h définie sur $]0 \ ; \ +\infty[$ par : $h(x) = x^2 - 2lnx$

- Variations de h sur $]0 \ ; \ +\infty[$:

  $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \dfrac{2lnx}{x^2}\right) = +\infty$

  $h'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2-2}{x}$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

x	**0**		**1**		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	

Tableau de variation de h

x	**0**		**1**		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\color{red}{\mathbf{(1)}}$

- Signe de $h(x)$ sur $]0 \ ; \ +\infty[$:

  D'après le tableau de variation de h $\forall \ x \in]0 \ ; \ +\infty[$ $h(x) > 0$ $\color{red}{\mathbf{(0,50)}}$.

  c) Variation de f :

  $f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{2}{x} \times x - 2(1 + lnx)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2lnx}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$ $\color{red}{\mathbf{(0,50)}}$

  $\forall \ x \in]0 \ ; \ +\infty[$ $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $h(x)$ $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$

  $\forall \ x \in]0 \ ; \ +\infty[$ $h(x) > 0$ alors $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante. $\color{red}{\mathbf{(0,25)}}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

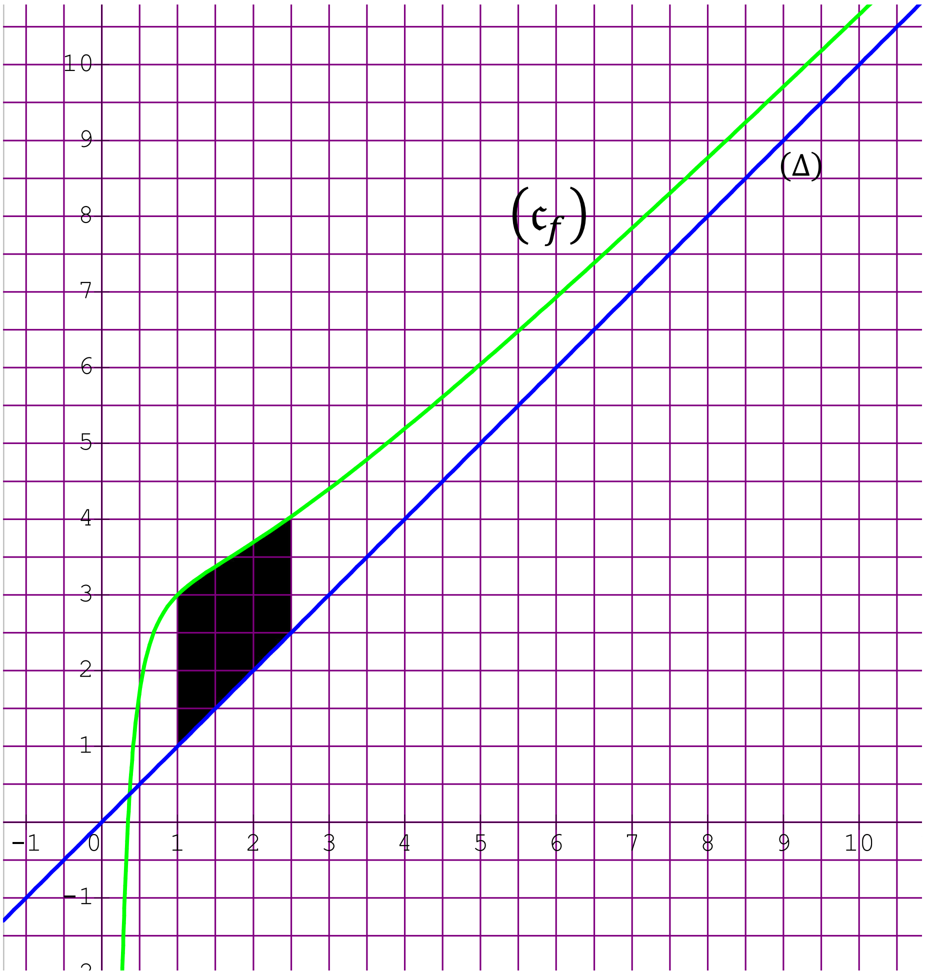
$\color{red}{\mathbf{(0,5)}}$

d) Prouvons que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(1+lnx)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \frac{2lnx}{x} = 0 \ \ \color{red}{\mathbf{(0,50)}}$$

D'où Δ : $y = x$ est une asymptote oblique à $\left(\mathcal{C}_f\right)$

2°/ a) Figure



$\color{red}{\mathbf{(1)}}$

b) On désigne par $\mathcal{A}(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par $\left(\mathcal{C}_f\right)$, (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calculons $\mathcal{A}(k)$:

$$\mathcal{A}(k) = \int_1^k (f(x) - y)dx \ \color{red}{\mathbf{(0,50)}} = \int_1^k \frac{2+2lnx}{x} dx = \left[2lnx + \frac{2(lnx)^2}{2}\right]_1^k \ \ \color{red}{\mathbf{(0,50)}}$$

$\mathcal{A}(k) = [2lnx + (lnx)^2]_1^k = (2lnk + (lnk)^2)U.a$ $\color{red}{\mathbf{(0,50)}}$

c) $\mathcal{A}(k) = 8 \Leftrightarrow (lnk)^2 + 2lnk - 8 = 0$

Posons $lnk = X$, on aura $X^2 + 2X - 8 = 0$;

$\Delta' = 1 + 8 = 9$; $X_1 = -1 - 3 = -4$; $X_2 = -1 + 3 = 2$

Pour $X = -4 \Longrightarrow lnk = -4 \Leftrightarrow k = e^{-4}$

Pour $X = 2 \Longrightarrow lnk = 2 \Leftrightarrow k = e^2$

Donc $k = e^{-4}$ ou $k = e^2$ $\color{red}{\mathbf{(1)}}$