Exercice 1 : .... (6 ***points***)

1. Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue : $z^2 + 2z + 4 = 0$, détermine le module et un argument de chaque solution. **(1,5pt)**

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$. On considère la transformation (T) du plan qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' défini par : $Z' = e^{\frac{2i\pi}{2}} Z$.

a. Détermine la nature de la transformation (T) et donne tous ses éléments caractéristiques. (**1,5pt)**

b. Soit A le point d'affixe Z_A. Détermine les affixes respectives Z_B et Z_C des points B et C tels que $B = T(A)$ et $C = T(B)$.Construis les points, B et C dans le plan muni du repère $\left(O\,; \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$. **(1,5pt)**

3. Calcule puis en déduis la nature du triangle ABC. **(1,5pt)**

Exercice 2 : .... (4 ***points***)

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t (exprimé en heures) , peut être considéré comme une fonction g à valeurs réelles de la variable t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée g' de cette fonction. On a constaté que $g'(t) = k \times g(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1. Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $g'(t) = kg(t)$ telle que $g(0) = N$ **(1 pt)**

2. Sachant qu'au bout de 2 heures le nombre de microbes a quadruplé, calculez en fonction de N le nombre de microbes au bout de 3 heures. **(1,5pt)**

3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures. **(1,5pt)**

Problème : .... **(10** ***points*****)**

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Montre que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations. **(1,5pt)**

2. Précisez la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique. **(0,5pt)**

3. Etudie les variations de f. **(1,5pt)**

4. Existe - t - il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur ? Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points. **(2 pts)**

5. Tracez la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé **(1 pt)**

6. Montre que la restriction g de $f\,'$ à l'intervalle $I =]\,1\,;\,2\,]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera. **(1,5pt)**

7. **a.** Calcule $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{5}{2}\right)$ **(1 pt)**

b. Dressez le tableau de variation de g^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f. **(1,5pt)**

EXERCICE 1 :

1. Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

$$\Delta' = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4 = -1 = i^2$$

$$z_1 = -\sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = -\sqrt{3} + i \quad ; \quad S = \left\{-\sqrt{3} - i\, ,\, -\sqrt{3} + i\right\}$$

Le module et un argument de chaque solution.

Modules:

$$\left|z_1\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2\ ;\ \left|z_2\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

Arguments:

Soient $\theta_1 = Arg(z_1)$ et $\theta_2 = Arg(z_2)$

$$\theta_1 : \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\theta_2 : \begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Autre méthode:

On a $Z_1 = \overline{Z}_2$ donc $\left|Z_2\right| = \left|Z_1\right| = 2$

$$\arg(Z_2) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\ ;\ \arg(Z_1) = -arg(Z_2) = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\ \ ou$$

$$arg(Z_1) = \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\, ;\, \vec{u}\, ;\, \vec{v}\right)$,

$T : P \to P$

$M \longmapsto M'$ tels que : $M \longmapsto Z\ ;\ M' \longmapsto Z' = e^{2i \times \frac{\pi}{3}} Z.$

a. La nature de la transformation T et ses éléments caractéristiques :

première possibilité

$Z' = e^{2i \times \frac{\pi}{3}} Z \Leftrightarrow T$ est une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

Deuxième possibilité

Z' est de la forme $Z' = aZ + b$ *avec* $a = e^{2i \times \frac{\pi}{3}}$ *et* $b = 0$

T est une similitude directe de rapport : $k = \left|e^{2i \times \frac{\pi}{3}}\right| = 1$,de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a} = 0$

et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ donc T est la rotationde centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a} = 0$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

$$a = \frac{1}{1 - e^{2i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{e^{i \times \frac{\pi}{3}}.e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}.e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{1}{-2\,i\sin\frac{\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{6}\left(3+i\sqrt{3}\right).$$

d'où T est une similitude de rapport 1; de centre de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ *rad.*

On sait toute similitude de rapport 1 est aussi une rotation.

b. $Z_A=-\sqrt{3}+i=z_2=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

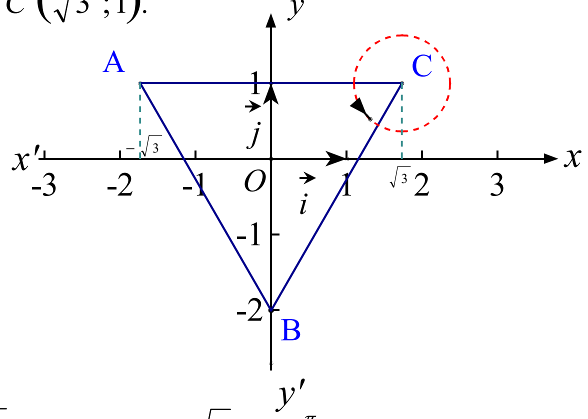
Les affixes respectives Z_B et Z_C des points B et C tels que : $B=T(A)$ et $C=T(B)$

$$T(A)=B\Leftrightarrow Z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}Z_A=2e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}=2e^{i\frac{9\pi}{6}}=2e^{i\frac{3\pi}{2}}=-2i\Leftrightarrow B(0\,;\,-2)$$

$$T(B)=C\Leftrightarrow Z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}Z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{3\pi}{2}}=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{13\pi}{6}}=2e^{i\frac{12\pi}{6}+i\frac{\pi}{6}}$$

$Z_C=2e^{2i\pi}.\,e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}+i$ d'où $C\left(\sqrt{3}\,;1\right)$.

Construction :



3. Calculons : $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}$

$$\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}=\frac{-2i-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

La nature du triangle ABC :

$$Arg\left(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}\right)=\frac{\pi}{3}=mes\,\widehat{\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)}\ et\ \frac{CB}{CA}=1\ donc\ ABC \text{ est un triangle equilatéral}$$

EXERCICE 2 :

Le nombre de microbe à l'instant t est exprimé en heures

g est la fonction associée à valeur réelle de cette culture.

g' est la vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes de la fonction g avec $g'(t)=kg(t)$ où k est le coefficient strictemen positif.

1. L'unique solution de l'équation différentielle $g'(t)=kg(t)$ telle que $N=g(0)$

$g'(t)=kg(t)\Longrightarrow g(t)=Ae^{kt}$

$g(0)=N\Leftrightarrow A=N$, donc $g(t)=Ne^{kt}$.

2. $g(2)=4g(0)$

Le nombre de microbe au bout de 3 heures.

$g(3)=Ne^{3k}$

La valeur du coefficient k.

$g(2)=4g(0)\Leftrightarrow Ne^{2k}=4N\Leftrightarrow e^{2k}=4\Longrightarrow k=\ln 2=0{,}69$ donc $g(t)=Ne^{t\ln 2}$

$g(3)=Ne^{3\ln 2}=Ne^{\ln 2^3}=8N$

3. La valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures.

$$g(5)=9\,600\Leftrightarrow Ne^{5\ln 2}=9\,600\Longrightarrow N=\frac{9\,600}{e^{\ln 2^5}}=\frac{9600}{2^5}=\frac{9600}{32}=300.$$

PROBLEME :

D'après l'énonce on a :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

(C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} \; ; \vec{j})$.

1. Montrons que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations :

Ensemble de définition de la fonction f

$D_f = \{x \in \mathbb{R}, x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Les limites aux bornes de D_f:

En ∞ :

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}\right) = -\infty$ possibilité d'asymptote oblique

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}\right) = +\infty$

Recherche des branches infinies aux voisinages de ∞ :

f étant une fonction rationnelle dont le degré du numéteur est supérieure au degré du dénominateur, donc $f(x)$ peut s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ où a, b, c sont des nombres réels à déterminer (plusieurs méthodes).

$$f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \frac{(x^2-2x+1)+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2+1}{x-1} = x-1+\frac{1}{x-1}$$

$\forall x \in D_f$ donc $f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty}(f(x)-(x-1)) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto -\infty}(f(x)-(x-1)) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$ par suite la droite (D) d'équation $y = x-1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$.

En 1 :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \dfrac{1}{0}$

Signe du zéro (ou signe de $(x-1)$)

Posons $x-1=0 \Longrightarrow x=1$

Tableau de signe

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à (C_f)

2. Position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.

Signe de $(f(x)-y)$.

$f(x) - y = \dfrac{1}{x-1}$

$\forall x \in D_f$, $(f(x)-y)$ a le même signe que $(x-1)$.

Tableau de signe et de position :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
Position	(C_f) *est en dessous de l'asymptote oblique*		(C_f) *est au dessus de l'asymptote oblique*

3. Etudions les variations de f.

✓ Dérivée :

$$\forall x \in D_f\ ,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

✓ Signe de $f'(x)$

$\forall x \in D_f$, $f'(x)$ a les mêmes signes que $x(x-2)$ car $(x-1)^2 > 0$

Posons $x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Tableau de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

✓ Les extrémums :

$$f(0) = \frac{0^2 - 2\times 0 + 2}{0-1} = -2 \quad ; \quad f(2) = \frac{4-4+2}{2-1} = 2$$

✓ Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. Oui il existe des points de (C_f) où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} = -1 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 0$$

pour tout $x \in D_f$.

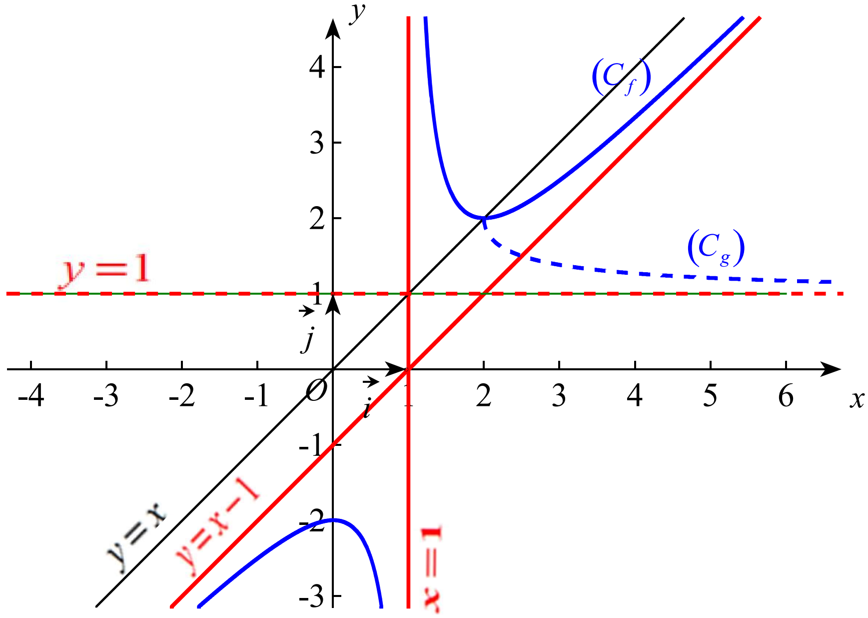
$(x-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$

Equations de ces tangentes en ses points : $f(-1) = \frac{1+2+2}{-1-1} = -\frac{5}{2}$; $f(3) = \frac{9-6+2}{3-1} = \frac{5}{2}$

$(T_{-1}) : y = \frac{3}{4}(x+1) - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$; d'où $(T_{-1}) : y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

$(T_3) : y = \frac{3}{4}(x-3) + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$; d'où $(T_3) : y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

5. Trace de la courbe (C_f) et ses asymptotes :



6. Montrons que la restriction g de f à l'intervalle $I =]1\,;2]$ est une bijection de I sur J que l'on précisera:

d'après le tableau de variation de f, sur $]1\,;2]$, $g = f \restriction]1\,;2]$ est définie, continue et strictement décroissante, donc g réalise une bijection de I sur $J = [2\,;+\infty[$.

7. **a.** Calcul de $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{5}{2}\right)$:

$$\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)} = ?$$

Calcul de $g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$

$$g(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$\Delta = 81 - 72 = 9$$

$$x_1 = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \notin J\ ;\ x_2 = \frac{9+3}{4} = 3 \in J \text{ donc } g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 3$$

$$g'(3) = 1 - \frac{1}{(3-1)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ par suite } g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{3}.$$

b. Tableau de variation de g^{-1}.

x	2	$+\infty$
$\left(g^{-1}\right)'(x)$	$-$	
$\left(g^{-1}\right)(x)$	2 ↘	1

La courbe représentative de g^{-1} est tracé en pointille dans le même repère que (C_f).