Exercice 1 : .... (**6** ***points***)

I. On pose : $P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$.

1. Calcule $P(2i)$
2. En déduis une factorisation de $P(z)$.
3. Résous l'équation $P(z) = 0$

II. Un lot de vaccin contre la méningite est efficace à 75% ,c'est -à-dire sur 100 personnes vaccinées 75 seulement sont sures d'être protegées contre la maladie. On vaccine 20 personnes avec ce produit. Quelle est la probabilité pour que :

a. Aucune des personnes ne soit protegée ?

b. la moitié des personnes est protegée ?

c. Les vingt personnes sont protegées ?

Exercice 2 : .... (**4** ***points***)

Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé.

La population initiale est de 100 bactéries . La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries .

On suppose que la population augmente de 6, 5% toutes les heures et que le biologiste rajoute 100 bactéries à la préparation toutes les heures .

On note R_n le nombre de bactéries présentes dans la population au bout de n heures .

On admettra que pour tout entier naturel n : $R_{n+1} = 100 + 1{,}065R_n$.

On introduit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = R_n + \dfrac{100000}{65}$.

1. Montre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison .
2. Exprime (U_n) en fonction de n puis en déduis l'expression de R_n en fonction de n .
3. Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera t – il égal à 90% de la capacité maximale du milieu ?

Problème : .... (**6** ***points***)

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité : 1cm .

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Etudie les variations de f.
3. Montre que f réalise une bijection de $[1 ;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
4. Dresse le tableau de variation de f.
5. Trouve l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle.
6. Trouve les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative (C_f) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
7. Trace (C_f) et (T).
8. Soit F la fonction définie par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b et c sont des nombres réels .

   a. Détermine les réels a , b et c pour que F soit une primitive de f.

   b. Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice1 :

I. Soit $P(Z) = z^3 + (2-2\,i)z^2 + (5-4\,i)z - 10i.$

1. Calculons $P(2i)$

$P(2i) = (2i)^3 + (2-2i)(2i)^2 + (5-4i)(2i) - 10i = -8i - 8 + 8i + 10i + 8 - 10i = 0$

$P(2i) = 0$

2. Déduisons en une factorisation de P(z)

Première méthode

$2i$ est une racine de P alors P est divisible $(\textit{factorisable})$ par $z - 2i$

	1	$\mathbf{2-2i}$	$\mathbf{5-4i}$	$\mathbf{-10i}$
$\mathbf{2i}$		$\mathbf{2i}$	$\mathbf{4i}$	$\mathbf{10i}$
	1	**2**	**5**	**0**

D'où $P(z) = (z-2i)(z^2+2z+5)$

Deuxième méthode :

Division euclidienne

$2i$ est une racine de P alors P est divisible (factorisable) par $z - 2i$

$$\begin{array}{l|l}
z^3 + (2-2\,i)z + (5-4\,i)z - 10\,i & z - 2\,i \\
\hline
-z^3 + 2\,iz^2 & z^2 + 2z + 5 \\
\quad 2z^2 + (5-4i)z & \\
\quad -2z^2 + 4i & \\
\qquad 5z - 10\,i & \\
\qquad -5z + 10\,i & \\
\qquad 0 \;+\; 0 &
\end{array}$$

D'où $P(z) = (z-2\,i)(z^2+2z+5)$

Troisième méthode:

Coefficients indéterminés

P(z) est factorisable par $z - \mathbf{2}i$.Alors il existe les complexes $a;b$ et c tels que

$P(z) = (z-\mathbf{2}i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow P(z) = az^3 + (b - \mathbf{2}ai)z^2 + (c - \mathbf{2}bi)z - \mathbf{2}ic$

Par identification:

$$\begin{cases} a = \mathbf{1} \\ b - \mathbf{2}ai = \mathbf{2} - \mathbf{2}i \\ c - \mathbf{2}bi = \mathbf{5} - \mathbf{4}i \\ -\mathbf{2}ic = -\mathbf{10}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \mathbf{1} \\ b = \mathbf{2} \\ c = \mathbf{5} \end{cases} \qquad \textit{D'où } P(z) = (z-2i)(z^2+2z+5)$$

3. Résolvons l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+2z+5) = 0 \Leftrightarrow z_0 - 2i = \mathbf{0}$ ou $z^2 + \mathbf{2}z + \mathbf{5} = \mathbf{0}$

$z - \mathbf{2}i = \mathbf{0} \implies z = \mathbf{2}i$

$z^2 + \mathbf{2}z + \mathbf{5} = \mathbf{0}$

$\Delta' = \mathbf{1} - \mathbf{5} = -\mathbf{4} = (\mathbf{2}i)^2$

$z_1 = -\mathbf{1} - \mathbf{2}i$ et $z_2 = -\mathbf{1} + \mathbf{2}i$

$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{2i};\ -\mathbf{1} - \mathbf{2i};\ -\mathbf{1} + \mathbf{2i}\}$

II. On observe qu'il s'agit d'une loi binomiale de parametre $\mathrm{n} = \mathbf{20}$ et de probabilité $\mathrm{P} = 0,\ 75$ $q = \mathbf{1} - p = \mathbf{0{,}25}$.

Soit x la variable aléatoire correspondant au nombre de personne protégées parmi les **20.**

Pour $\mathbf{0 \leq x \leq 20}$ *on* a $\boldsymbol{P(x=k)=C_{20}^{k}\times(0{,}75)^{k}(0{,}25)^{n-k}}$

a. Calculons la probabilité pour que:
   Aucune personne ne soit protégée
   $\boldsymbol{P(x=0)=C_{20}^{0}\times(0{,}75)^{0}(1-0{,}75)^{20}=9{,}09\times10^{-13}}$ ***Soit*** $\boldsymbol{9{,}09\times10^{-13}}$

b. La moitié est protégée
   $\boldsymbol{P(x=10)=C_{20}^{10}\times(0{,}75)^{10}(1-0{,}75)^{10}=9{,}9\times10^{-3}}$ ***Soit*** $\boldsymbol{9{,}9\times10^{-3}}$

c. Les 20 personnes soient protégées
   $\boldsymbol{P(x=20)=C_{20}^{20}\times(0{,}75)^{20}(1-0{,}75)^{0}=0{,}031}$ ***Soit*** $\boldsymbol{31{,}71\times10^{-2}}$**.**

Exercice 2 :

On donne la suite (Rn) définie par $R_{n+1}=100+1,065R_n$ avec $R_0=100$ et la suite (Un) définie par $U_n=R_n+\dfrac{100000}{65}$.

1. Montrons que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

$$\boldsymbol{U_{n+1}=R_{n+1}+\frac{100000}{65}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1}=100+1{,}065R_n+\frac{100000}{65}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1}=\frac{106500}{65}+\frac{1065}{1000}R_n}$$

$$\boldsymbol{=1{,}065\left(\frac{100000}{65}+R_n\right)}$$

$\boldsymbol{U_{n+1}=1{,}065U_n}$. *Alors* $\forall n\in N$ (U_n) est une suite géométrique de raison $q=1{,}065$.

2. Exprimons Un en fonction de n puis déduisons R_n en fonction de n

$$\boldsymbol{U_n=U_0\times q^n=\frac{21300}{13}\times1,065^n\Leftrightarrow U_n=\frac{21300}{13}\times(1{,}065)^n}\ \textbf{ou encore}\ U_n=\boldsymbol{1638,46(1{,}065)^n}\ \text{ou}$$

encore $\boldsymbol{U_n=\dfrac{106500}{65}\times(1{,}065)^n}$.

On sait que $\boldsymbol{U_n=R_n+\dfrac{100000}{65}\Leftrightarrow R_n=U_n-\dfrac{100000}{65}}$

$$\boldsymbol{R_n=\frac{21300}{13}\times1{,}065^n-\frac{100000}{65}}\ \textbf{ou encore}\ \boldsymbol{R_n=\frac{106500}{65}\times1{,}065^n-\frac{100000}{65}}$$

ou encore $\boldsymbol{R_n=1638{,}46\times1{,}065^n-1538{,}46}$

3. Le temps d'attente pour ateindre 90% de saturation
   A 90% de saturation; le nombre de bactérie est 900. alors $R_n=900$

$$\frac{21300}{13}\times1{,}065^n-\frac{100000}{65}=900\Leftrightarrow\frac{21300}{13}\times1{,}065^n=\frac{158500}{65}$$

$$\frac{21300}{13}\times1{,}065^n=\frac{31700}{13}\Leftrightarrow1{,}065^n=\frac{317}{213}\Leftrightarrow n\ln(1{,}065)=\ln\left(\frac{317}{213}\right)$$

$$n=\frac{\ln317-\ln213}{\ln1{,}065}=6{,}31\approx7$$

Alors c'est apres 7 heures que la colonie sera à 90% de saturation.

Problème :

$f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ et (Cf) sa coube

1. L'ensemble de définition

$Df = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

2. Les variations de f

$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$

$f'(x) = (x+1)(1-x)e^{-x}.$

$\forall x \in \mathbb{R}\ ; e^{-x} > 0$ le signe de f' depend de $(x-1)(1-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	

Pour $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante

Pour $x \in [-1; 1]$ $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante.

3. Montrons que f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on precisera

$f(1) = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$ *et*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Sur $]1, +\infty[$ *La* fonction f est continue et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $[1; +\infty[$ vers $f([1; +\infty[) =]0; 4e^{-1}]$ Alors $J =]0; 4e^{-1}] = \left]0; \frac{4}{e}\right]$

4. Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

5. Trouvons une équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle

(T): $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow (T)$: $y = x + 1$ $\quad (f'(0) = f(0) = 1)$

6. Trouvons les coordonnées des points d'intersection avec les axes du repère

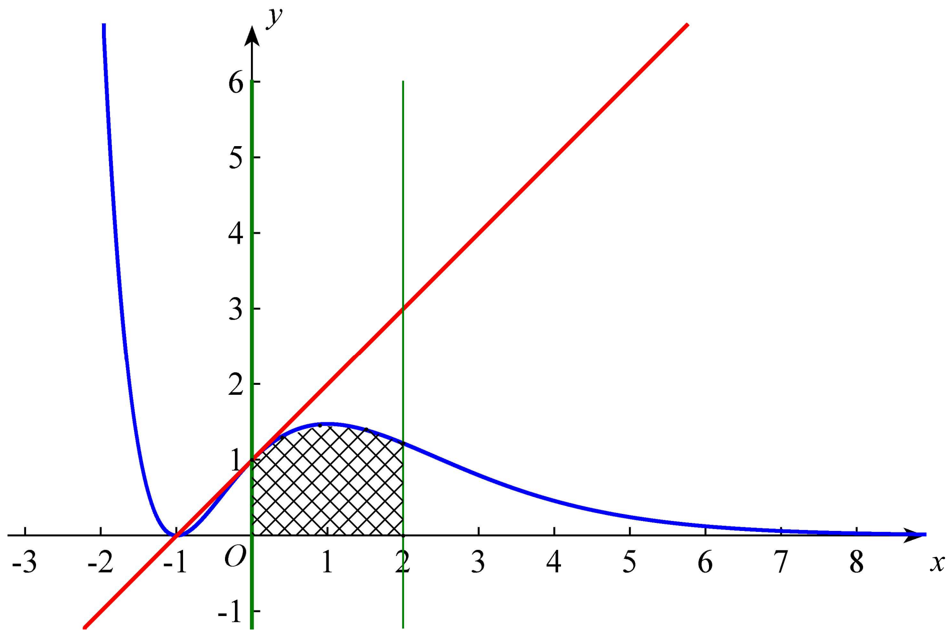
$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = -1$ car $e^{-x} > 0$

$(Cf) \cap (OX) = \{A(-1; 0)\}$

$f(0) = 1 \quad (Cf) \cup (OX) = \{B(0; 1)\}$

d'où l'intersection de (Cf) avec l'axe des ordonnées à pour coordonné $(0; 1)$.

7. Traçons (Cf) et (T) :



8. On donne $\boldsymbol{F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}}$

Déterminer a , b *et* c pour que F soit une primitive de f *sur* $\mathbb{R}$

Si F est une primitive de f alors $\boldsymbol{F'(x)=f(x)}$

$\boldsymbol{F'(x)}=(2ax+b)e^{-x}-\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

$F'(x)=\left(-ax^2-bx-c+2ax+b\right)e^{-x}$

$F'(x)=\boldsymbol{f(x)} \Leftrightarrow \left(-\boldsymbol{a}x^2+(2a-b)x+b-c\right)e^{-x}=\left(x^2+2x+1\right)e^{-x}$

Par identification on a $\begin{cases}-a=1\\ 2a-b=2\\ b-c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=-4\\ c=-5\end{cases}$

Calculons l'aire du domaine

1ère *possibilité*: L'aire comprise entre (C_f), (Ox) et les droites d'équation $x=\mathbf{0}$ et $x=\mathbf{2}$

$$A_1=\int_0^2 f(x)\,dx\times u_a=\int_0^2(x+1)^2e^{-x}dx=\left[F(2)-F(0)\right]_0^2=-17e^{-2}+5$$

$\boldsymbol{A_1=-17e^{-2}+5\ \mathrm{cm}^2=2{,}69\mathrm{cm}^2}$

2ème *possibilité*: L'aire comprise entre (C_f), (T) et les droites d'équation $x=\mathbf{0}$ et $x=\mathbf{2}$

$$A_2=\left[\int_0^2(y-f(x))\,dx\right]\times u_a$$

$$A_2=\int_0^2(y-f(x))dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x-F(x)\right]_0^2 \text{ avec } A_1=-17e^{-2}+5$$

$A_2=4-A_1=17e^{-2}-1 \Leftrightarrow A_2=1{,}30$

3ème *possibilité* : L'aire comprise entre (T), (Ox) et les droites d'équation $x=\mathbf{0}$ et $x=\mathbf{2}$

$A_3=A_1+A_2=-1+17e^{-2}+5-17e^{-2}$

$A_3=\mathbf{4cm}$

Autre méthode:

$$A_3=\left[\int_0^2(x+1)\,dx\right]u_a=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2u_a$$

$A_3=\mathbf{4cm^2}$