Exercice 1 : .... (5 points)

I. On considère la fonction de la variable complexe définie par :.

1. Vérifie que $f(z)=z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i$.

2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

3. Ecris les solutions l'équation $f(z)=0$ sous forme algébrique.

II. Détermine la nature des transformations suivantes dans le plan complexes et détermine leurs éléments caractéristiques

1. $z'=z+1-2i$
2. $z'=iz+1$
3. $z'=3z-1+i$
4. $z'=(1+i)z-1+i$

Exercice 2 : .... (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$

1. Calcule u_1 et u_2.
2. a. Démontre que pour tout entier naturel non nul , $0<u_n<1$
   b. Démontre que la suite est croissante.
   c. Que pouvez-vous en déduire ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$
   a. Démontre que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Calcule, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n.
   c. Démontre que la suite u_n est convergente et détermine sa limite.

Problème : .... (10 points)

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie. Des relevés statistiques ont permis de modéliser le nombre de malades durant l'épidémie par la fonction f définie sur l'intervalle $[1;26]$ par :
$f(t)=24\ln(t)-3t^2+10$ où t représente le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

1. Calcule $f'(t)$.

2. a. Etudie le signe de $f''(t)$ sur l'intervalle $[1;26]$.
   b. Dresse le tableau de variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[1,26]$.
   c. Montre que l'équation $f'(t)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1;26]$ dont on donnera un encadrement par deux entiers consécutifs.
   d. En déduis le signe $f'(t)$ de sur l'intervalle puis les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;26]$.

3. On admet que $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout t de semaines.
   a. Dans le contexte du problème, donne une interprétation du tableau de variations de la fonction dérivée f' obtenu à la question 2. b.
   b. En se servant des questions précédentes, détermine le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malade par semaine a commencé à diminuer.

Exercice 1 :

I. $f(z)=z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i$

1. Vérifions que $f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$.

Developper l'expression : $(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

Première méthode : Tableau d'HORNER:

	1	$-2\sqrt{3}-2i$	$4+i4\sqrt{3}$	$-8i$
$2i$		$2i$	$-4i\sqrt{3}$	$8i$
	1	$-2\sqrt{3}$	4	0

Alors $f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$.

Deuxième méthode : Par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l}
z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i & z-2i \\ \cline{2-2}
\underline{-z^3+2iz^2\quad} & z^2-2\sqrt{3}z+4 \\
-2\sqrt{3}z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z & \\
\underline{2\sqrt{3}z^2-4i\sqrt{3}z} & \\
4z-8i & \\
\underline{-4z+8i} & \\
0 &
\end{array}$$

Alors $f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$.

2. Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $f(z)=0$:

$(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0 \Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$z-2i=0 \Longrightarrow z=2i$

$z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta'=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4=-1=i^2$

$z_1=\sqrt{3}-i$ et $z_2=\sqrt{3}+i$; $S=\left\{2i, \sqrt{3}-i, \sqrt{3}+i\right\}$

3. Une écriture trigonométrique de chacune des solutions:

Pour $z_0=2i$

$|z_0|=2$; $arg(z_0)=\frac{\pi}{2}$ donc $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Pour $z_1=\sqrt{3}-i$

$|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$; $arg(z_1)=-\frac{\pi}{6}$, donc $z_1=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

Pour $z_2=\sqrt{3}+i$

$|z_2|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$; $arg(z_2)=\frac{\pi}{6}$ donc $z_2=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

II. La nature et les éléments caractéristiques des transformations

On rappelle que toute similitude directe a pour écriture complexe $Z'=aZ+b$, avec a $\in\mathbb{C}^*$ et b $\in\mathbb{C}$

dont les éléments caractéristiques sont: rapport $k = \left| a \right|$, d'angle un argument de a et de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$ avec $a \neq 1$

1. $Z' = Z + 1 - 2\,i$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $1-2i$
2. $Z' = i\,Z + 1$ est l'écriture complexe de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$
3. $Z' = 3Z - 1 + i$ est l'écriture complexe de l'homothétie de rapport : $k = 3$, de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$.
4. $Z' = (\,1 + i\,)\,Z - 1 + i$ est l'écriture complexe de la similitude directe de rapport $k = |1 + i| = \sqrt{2}$, d'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{-1+i}{-i} = -1 - i$.

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n: $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

1. Calcul de u_1 et u_2

$$u_1 = \frac{0+3}{0+4} = \frac{3}{4} \;\; ; \;\; u_2 = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) + 3}{\left(\frac{3}{4}\right) + 4} = \frac{18}{19}$$

2. a. Montrons que pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n < 1$.

On a: $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n + 4}$.

Procédons par le raisonnement par recurrence:

pour $n = 1$, $u_1 = \frac{3}{4}$ donc $0 < u_1 < 1$ (vrai)

Supposons pour n non nul fixé, $0 < u_n < 1$ et montrons que pour tout entier n non nul :$0 < u_{n+1} < 1$

On a: $0 < u_n < 1$

$4 < u_n + 4 < 5$

$\frac{5}{5} < \frac{5}{u_n + 4} < \frac{5}{4}$

$2 - \frac{5}{4} < 2 - \frac{5}{u_n + 4} < 1$

$\frac{3}{4} < \mathrm{u}_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$.

Ainsi pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n < 1$.

b. Montons que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - u_n = \frac{2u_n + 3 - (u_n)^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-(u_n)^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4} = \frac{(1 - u_n)(\,u_n + 3\,)}{u_n + 4} > 0$$

car chacun des facteurs est positif. D'où la suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente.

Autres méthodes : étude de la fonction $f(\,x\,) = \frac{2x + 3}{x + 4}$ sur l'intervalle $[0,1]$

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n: $\mathrm{v}_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

a. Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.

$$\mathrm{v}_{n+1} = \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{1}{5}\frac{u_n - 1}{u_n+3} = \frac{1}{5}\mathrm{v}_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{1}{3}$.

b. u_n en fonction de n.

On a: $v_n = \dfrac{-1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ pour tout n entier naturel

$$v_n = 1 - \frac{4}{u_n+3} \Rightarrow v_n - 1 = -\frac{4}{u_n+3}$$

$$u_n + 3 = -\frac{4}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = -\frac{4}{v_n-1} - 3$$

$$u_n = -\frac{4}{\dfrac{-1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n - 1} - 3$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. La suite (u_n) converge vers 1.

Problème :

$f(t) = 24\, t \ln(t) - 3t^2 + 10$

1. Calculons $f'(t)$.

$f'(t) = 24 \ln(t) + 24 - 6\, t.$

2. a. Etudions le signe de $f''(t)$ sur $[1;26]$

$$f''(t) = \frac{24}{t} - 6 = \frac{24 - 6\,t}{t}$$

Tableau de signe

t	1	4	26
$24 - 6\,t$	+	0	−

Sur $[1;4]$ $f''(t) \geq 0$ et sur $[4;26]$ $f''(t) \leq 0$.

b. Dressons le tableau de variations de f'

t	1	4	26
$f''(t)$	+	0	−
$f'(t)$	18 ↗	$48\ln 2$	↘ $24\ln(26) - 132$

$f'(1) = 18$, $f'(4) \cong 33{,}27$ et $f'(26) \cong -53{,}80$.

c. Montrons que l'équation $f'(t) = 0$ admet une soluton unique $\alpha \in [1;26]$.

f' est continue et strictement croissante (bijective) de $[1;4]$ sur $[18; 33{,}27]$ et $0 \notin [18; 33{,}7]$

donc l'équation $f'(t) = 0$ n'admet pas de soluton sur $[1; 4]$.

f' est continue et strictement décroissante (bijective) de $[4; 26]$ sur $[-53{,}80; 33{,}27]$ et $0 \in [-53{,}80; 33{,}27]$ donc l'équation $f'(t) = 0$ admet une soluton unique $\alpha \in [1; 26]$.

$f'(14) = 3{,}33$ et $f'(15) = -1{,}006$ donc $14 < \alpha < 15$.

d. Le signe de $f'(t)$ sur $[1; 26]$

Pour tout t de $[1; \alpha]$ $f'(t) \geq 0$ et pour tout t de $[\alpha; 26]$ $f'(t) \leq 0$.

Dressons le tableau de variations de f

t	1		α		26
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$			$f(\alpha)$		
	7	$\nearrow$		$\searrow$	15,05

$f(1) = 7$ (soit 7000 malades), $f(26) \cong 15{,}05$ (soit 15050 malades)

3. a. Une interprétation du tableau de variation de la fonction f'.
   - De la première à la quatrième semaine la vitesse de la probagation de l'épidemie augmente.
   - De la quatrième à la $26^{ème}$ semaine la vitesse de la probagation de l'épidemie diminue

   b. Le nombre de malades commence à diminuer à partir de la $14^{ème}$ semaine écoulée.