

EXAMEN : *Baccalauréat malien*

BAC 2015

SÉRIE : *TSEco*

SESSION : *Juin 2015*

ÉPREUVE : *Mathématiques*

DURÉE : *3heures*

COEF : *3*

Exercice 1 : (6 points)

Une somme de 3 000 000 F est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.

1. Quelle somme obtient – on à l'issue de ce placement ? (2 pts)
2. Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 7 247 295 F, quelle somme doit – on placer aujourd'hui, aux taux de 10% ? (1 pt)
3. La somme d'aujourd'hui, 3 000 000 F aux de 10%, après combien de temps disposera – t – on d'une somme égale à 7 781 227 F (1 pt)
4. Si au bout de 3 ans la valeur acquise du placement est de 3 149 280 F à quel taux le placement a été effectué ? (2 pts)

Exercice 2 : (6 points)

Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous forme de fractions.

Une urne contient 30 boules numérotées de 1 à 30 indiscernables au toucher.

1. Indique les numéros qui sont multiples de 3 et de 5. (1 pt)
2. On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer :
 - a. La probabilité que le numéro tirée soit multiple de 3 et de 5. (1,5 pt)
 - b. La probabilité que le numéro tirée soit multiple de 3 ou de 5. (1,5 pt)
3. On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins une foi un numéro multiple de 3 et de 5. (2 pts)

Exercice 3 : (8 points)

- A. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (2x + 10)e^{-0,5x+1}$
1. On note f' sa fonction dérivée.
 - a. Justifier que pour tout x de $[0 ; +\infty[: f'(x) = (-x - 3)e^{-0,5x+1}$ (0,5 pt)
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$. (1 pt)
 2. Justifier que la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $F(x) = (-4x - 28)e^{-0,5x+1}$ est une primitive de f sur le même intervalle. (0,5 pt)
 3. Calculer l'intégrale $I = \int_4^6 f(x)dx$ (on donnera la arrondie à 0,01 près) (1 pt)
- B. La demande de produits à base du beurre de karité fabriqués par une association féminine est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A.). Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers de produits, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines de francs CFA
1.
 - a. Calculer le nombre de produits demandés, à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 400 f CFA. (0,5 pt)
 - b. Calculer le nombre de produits demandés, à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 600 f CFA. (0,5 pt)
 2. Déterminer la demande à une unité près, lorsque le prix unitaire est compris entre 400 et 600f CFA. (1 pt).
- C. L'élasticité de la demande est exprimée par la fonction E définie par : $E(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$ (En économie, l'élasticité de la demande exprime l'effet des variations du prix de vente un produit sur le niveau de demande de ce produit).
1. Vérifier que, pour tout x de $[0 ; +\infty[: E(x) = - \frac{x^2+3x}{2x+10}$ (2 pts)

2. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2, c'est - à - dire qu'il s'agit de résoudre $E(x) = -2$ (1 pt).

Correction du Bac Session de Juin 2015 Série : TSEco

Exercice 1 :

Méthode en appliquant l'intérêt simple

Une somme de 3 000 000F est placée pendant 5ans au taux annuel de 10%.

1. La somme qu'on obtient à l'issue de ce placement est :

$$v_a = C + I \text{ avec } I = Ctn \quad I = \text{intérêt} \quad ; \quad C = \text{capital} \quad ; \quad t = \text{taux} ;$$

$$v_a = C + Ctn \quad n = \text{durée} \quad ; \quad v_a = \text{valeur acquise}$$

$$v_a = 3\,000\,000 + 3\,000\,000 \times \frac{10}{100} \times 5 = 4\,500\,000\text{F} \quad (2 \text{ pts})$$

2. La somme qu'on doit placer est :

$$v_a = 7\,247\,295\text{F} \quad ; \quad C = ? \quad ; \quad t = 10\% \quad ; \quad n = 5\text{ans}$$

$$v_a = C(1 + tn) \Rightarrow C = \frac{v_a}{1 + tn} \Rightarrow C = \frac{7\,247\,295}{1 + 0,1 \times 5} = 4\,831\,530\text{F}$$

Pour obtenir 7 247 295F, il doit placer aujourd'hui, au taux de 10% une somme de 4 831 530F. (1 pt)

3. Le temps qu'on doit disposer est :

$$C = 3\,000\,000 \quad ; \quad t = 10\% \quad ; \quad n = ? \quad ; \quad v_a = 7\,781\,227\text{F}$$

$$v_a = C(1 + tn) \Rightarrow n = \frac{v_a - C}{Ct} \Rightarrow n = \frac{7\,781\,227 - 3\,000\,000}{3\,000\,000 \times 0,1} = 15\text{ans } 11\text{mois } 7\text{jours} \quad (1 \text{ pt})$$

Le temps qu'il disposera d'une somme égale à 7 781 227F est de : 15ans 11mois 7jours

4. Le taux de placement qu'on doit effectuer est :

$$n = 3\text{ans} \quad ; \quad v_a = 3\,149\,280\text{F} \quad ; \quad C = 3\,000\,000 \quad ; \quad t = ?$$

$$v_a = C + Ctn \Rightarrow t = \frac{v_a - C}{Cn} \Rightarrow t = \frac{3\,149\,280\text{F} - 3\,000\,000}{3 \times 3\,000\,000} \Rightarrow t = 0,016 \Rightarrow t = 1,6\%. \quad (2 \text{ pts})$$

Méthode en appliquant l'intérêt composé

1. La somme obtenue à l'issue de ce placement :

$$C_5 = 3.000.000(1 + 10\%)^5 = 3.000.000(1,1)^5 = 4.831.530 \text{ F} \quad (2 \text{ pts})$$

2. La somme que l'on doit placer aujourd'hui :

$$C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$$

$$C_0 = C_5(1 + i)^{-5} = 7.247.295(1,1)^{-5} = 4.500.000 \text{ F} \quad (1 \text{ pt})$$

3. Déterminons cette durée de placement.

$$C_n = C_0(1 + i)^n \Leftrightarrow 7.781.227 = 3.000.000(1,1)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{7.781.227}{3.000.000} = (1,1)^n \Leftrightarrow \ln\left(\frac{7.781.227}{3.000.000}\right) = n \ln(1,1) \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{7.781.227}{3.000.000}\right)}{\ln(1,1)} = 9,999.999 \cong 10 \quad (0,25 \text{ pt})$$

D'où $n = 10 \text{ ans}$ (0,50 pt)

4. Le taux de placement effectué

$$C_n = C_0(1 + i)^n \Leftrightarrow 3.149.280 = 3.000.000(1 + i)^3 \quad (0,50 \text{ pt})$$

$$\Leftrightarrow \frac{3.149.280}{3.000.000} = (1 + i)^3$$

$$\Leftrightarrow (1,04976)^{1/3} = 1 + i \Leftrightarrow (1,04976)^{1/3} - 1 = i \Rightarrow 0,016318 = i$$

D'où $t = 1,63\%$. (1 pt)

Exercice 2 :

Une urne contient 30 boules numérotées de 1 à 30

1. Les numéros qui sont multiples de 3 et de 5 sont : {15 ; 30} (1 pt)

2. Calculons :

- a. la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 et de 5 est : $P_1 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ (1,50 pt)
- b. la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 ou de 5 est :
Les numéros qui sont multiples de 3 ou de 5 sont :

$$\{3; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 21; 24; 25; 27; 30\} \text{ (0,50 pt) } P_2 = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \text{ (1 pt)}$$

Autre méthode de réponse b.) :

Soit A l'évènement « le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 » (0,25 pt)

Soit B l'évènement « le numéro de la boule tirée soit multiple de 5 » (0,25 pt)

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \text{ (0,25 pt) } P(B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \text{ (0,25 pt)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (0,25 pt) } = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \text{ (0,25 pt)}$$

3. Calculons la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5 :

$$P_3 = \frac{3(2^1 \times 28^2 + 2^2 \times 28^1) + 2^3 \times 28^0}{30^3} = \frac{5\,048}{27\,000} = \frac{631}{3\,375} \text{ (2 pts)}$$

Autre méthode de réponse 3.)

Soit E l'évènement « obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5 »

\bar{E} l'évènement « ne pas obtenir un numéro multiple de 3 et de 5 »

$$P(\bar{E}) = \frac{28^3}{30^3} \text{ (0,50 pt) } P(E) = 1 - P(\bar{E}) \text{ (0,50 pt) } = 1 - \frac{28^3}{30^3} = \frac{30^3 - 28^3}{30^3} = \frac{5\,048}{27\,000} = \frac{631}{3\,375} \text{ (1 pt)}$$

Exercice 3 :

A. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (2x + 10)e^{-0,5x+1}$

1. a. Justifions que $\forall x \in [0; +\infty[$ par : $f'(x) = (-x - 3)e^{-0,5x+1}$

$$f'(x) = 2e^{-0,5x+1} - 0,5(2x + 10)e^{-0,5x+1} = (2 - x - 5)e^{-0,5x+1} = (-x - 3)e^{-0,5x+1}$$

- b. Étudions le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$:

$$\forall x \in [0; +\infty[; e^{-0,5x+1} > 0 \text{ donc } f'(x) \text{ a même signe que } -x - 3 \text{ (0,25 pt)}$$

$$\text{On sait que pour tout } x \in [0; +\infty[, -x - 3 \leq 0 \text{ (0,25 pt)}$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0; +\infty[f'(x) < 0 \text{ d'où } f \text{ est strictement décroissante. (0,50 pt)}$$

2. Justifions que F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; +\infty[F'(x) &= -4e^{-0,5x+1} - 0,5(-4x - 28)e^{-0,5x+1} \\ &= (-4 + 2x + 14)e^{-0,5x+1} = (2x + 10)e^{-0,5x+1} \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[F'(x) = f(x) \text{ d'où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [0; +\infty[. \text{ (0,50 pt)}$$

3. Calculons l'intégrale :

$$I = \int_4^6 f(x)dx = [F(x)]_4^6 \text{ (0,50 pt) } = F(6) - F(4) = -52e^{-2} + 44e^{-1} = 9,15 \text{ (0,50 pt)}$$

B. 1. a. Calculons le nombre de produits demandés à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 400 F CFA:

$$f(4) = (2 \times 4 + 10)e^{-0,5 \times 4 + 1} = 18e^{-1} = 6,622$$

$$\text{le nombre de produit demandés est } 6,622 \times 1\,000 = 6\,622.$$

- b. Calculons le nombre de produits demandés à l'unité près lorsque le prix unitaire est fixé à 600 F CFA :

$$f(6) = (2 \times 6 + 10)e^{-0,5 \times 6 + 1} = 22e^{-2} = 2,977$$

$$\text{le nombre de produit demandés est } 2,977 \times 1\,000 = 2\,977$$

2. Déterminons la demande moyenne à une unité près, lorsque le prix unitaire est compris entre 400 et 600 F CFA:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (0,25 \text{ pt}) \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{6-4} \int_4^6 f(x) dx = \frac{1}{2} \times 9,15 = 4,575 \quad (0,25 \text{ pt})$$

la demande moyenne à une unité près, lorsque le prix unitaire est compris entre 400 et 600 F CFA est : $4,575 \times 1\,000 = 4\,575$. **(0,50 pt)**

C. On donne : $E(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$

1. Vérifions que : $\forall x \in [0 ; +\infty[\quad E(x) = -\frac{x^2+3x}{2x+10}$

$$E(x) = x \frac{(-x-3)e^{-0,5x+1}}{(2x+10)e^{-0,5x+1}} \quad (1 \text{ pt}) \quad \Rightarrow \quad E(x) = \frac{-(x^2+3x)}{2x+10} \quad (1 \text{ pt})$$

2. Calculons le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2 :

$$E(x) = -2 \Leftrightarrow -(x^2 + 3x) = -2(2x + 10) \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$\Delta = 81 ; x_1 = -4 \notin [0 ; +\infty[; \quad x_2 = 5 \in [0 ; +\infty[\quad (0,50 \text{ pt})$$

le prix pour lequel l'élasticité est égale à -2 est : 500 F CFA. **(0,25 pt)**