EPREUVE : ***Mathématiques*** - ***Série : TSECO*** - ***Durée : 3heures*** - ***Coef***

Exercice1 : .... (5 points)

1. La population d'une ville africaine était de 650 000 habitants début 2010 qui a augmenté de 8% la $1^{ère}$ année et de 10% l'année suivante. Quel a été le nombre d'habitants de cette ville en fin 2012 ? **(2pts)**
2. La population de cette ville est passée de 650 000 en 2010 à 721 500 en 2013. Quel est le coefficient multiplicateur ? Quel est le taux d'évolution ? **(1,5pt)**
3. Dans un aliment pour bébé, il y a 75% de légumes dont 60% de carottes.Quel pourcentage de carottes dans cet aliment ? **(1,5pt)**

Exercice 2 : .... (4 points)

Le 1^{er} janvier 2010 Mamadou a placé 120 000 à intérêts composés, au taux de 9%. On note C_n le capital au 1^{er} janvier $(2010+n)$.

1. Calculez C_1 puis établissez la relation entre C_n et C_{n+1}. Déduisez-en C_n en fonction de n. **(1 pt)**
2. Au 1^{er} janvier 2017 Mamadou aura besoin de 400000 pour acheter une moto.Le capital qu'il possèdera sera-t-il suffisant pour subvenir à cette dépense?Sinon combien devra-t-il emprunter? **(1,5pt)**
3. A quel taux aurait-il dû placer son capital le 1^{er} janvier 2010 pour disposer des 400 000F au 1^{er} janvier 2017 ? **(1,5pt)**

Exercice 3 :.. (3 points)

Le 15 juin trois effets :

- 87 000 F à échéance du 21 juillet
- 99 000 F à échéance du 4 août
- 109 000 F à échéance du 3 juillet,

sont remplacés par un effet unique à échéance du 13 juillet ; taux 9%.
Quelle est la valeur nominale de l'effet unique ?

Exercice 4 : .... (8 points)

On se propose d'étudier les effets du volume de la récolte mondiale d'un produit agricole sur les prix atteints par ce produit. Par la suite, x désigne la quantité récoltée en millions de tonnes. La recette totale en millions de francs CFA est donnée par la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\mathscr{R}(x) = -0,4x^2 + 8x$

1. Etudiez la fonction $\mathscr{R}$ et la représenter graphiquement **(2 pts)**
2. L'ensemble des charges totales (entrainées par la récolte) est donné par la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 25 + x$
   - **a.** Déterminez les points d'intersection de cette droite avec la parabole précédente représentant la recette totale. **(1 pt)**
   - **b.** Déterminez graphiquement la zone correspondante à un gain. **(2 pts)**
3. Déterminez la fonction bénéfice $\mathscr{B}$ et la représenter graphiquement. Déterminez la valeur de x pour laquelle le bénéfice atteint son maximum. **(3 pts)**

EXERCICE 1 :

1. Déterminons le nombre d'habitants de cette ville en fin 2012

La population, début 2010 est de 6500000 habitants; si elle augmente de 8% la première année puis de 10% la deuxième année alors on a un pourcentage successif d'où la population en fin 2012 est:

$650000\left(1+\dfrac{8}{100}\right)\left(1+\dfrac{10}{100}\right)=$ **772200 habitants**.

2. Déterminons le coéfficient multiplicateur lorsque la population passe de 650000 à 721500;

$$C_M=\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}=\frac{721500}{650000}=1{,}11\Rightarrow \mathbf{C_M=1{,}11}$$

Le taux d'évolution est: $t=(C_M-1)\times 100=(1{,}11-1)\times 100=11\%\Rightarrow \mathbf{t=11\%}$

3. Déterminons le pourcentage de carotte dans cet aliment

Il s'agit d'un pourcentage de pourcentage

$$t=\left(\frac{75\times 60}{100}\right)\%=45\%\Rightarrow \boldsymbol{t=45\%}$$

EXERCICE 2 :

1. Calculons C_1 puis établissons la relation entre C_n et C_{n+1}.

Le placement étant à intérêts composés $C_1=\left(1+\dfrac{t}{100}\right)C_0$ avec $C_0=120000$

$$C_1=\left(1+\frac{9}{100}\right)\times 120000=130800\Rightarrow C_1=130800$$

Dans un placement à intérêts composés on a une suite géométrique de raison

$$q=\left(1+\frac{t}{100}\right)=\left(1+\frac{9}{100}\right)=1{,}09\text{ , d'où }\boldsymbol{C_{n+1}}=1{,}09\times \boldsymbol{C_n}\,;$$

Déduisons en l'expression de C_n en fonction de n.

$C_n=120000\times(1{,}09)^n$

2. Déterminons d'abord la valeur acquise par C_0 en 2017

$2010+n=2017\Rightarrow \boldsymbol{n=7}$; d'où $C_7=120000\times(1{,}09)^7=219364{,}7<400000$ donc le capital est insuffisant. Il devra emprunter la somme de $400000-219364{,}7=\mathbf{180635{,}3}$.

3. Déterminons le taux de placement pour disposer de 400000 f

Resolvons l'équation $C_n=400000$

$$120000\left(1+\frac{t}{100}\right)^7=400000\Leftrightarrow\left(1+\frac{t}{100}\right)^7=\frac{400000}{120000}$$

On obtient $\dfrac{t}{100}=3{,}3^{\frac{1}{7}}-1\Rightarrow t=\left(3{,}3^{\frac{1}{7}}-1\right)\times 100$; d'où $t=\mathbf{18{,}6\%}$.

EXERCICE 3 :

	109000	X	87000	99000	*valeur nominale*
15/6	3/7	13/7	21/7	4/8	

Soit X la valeur nominale de l'effet unique de durée $n=\mathbf{30-15+13=28}$,

X_1 le premier effet de durée $\boldsymbol{n_1}=\mathbf{30-15+21=36}$

X_2 le deuxième effet de durée $\boldsymbol{n_2}=\mathbf{30+15+31+4=50}$

X_3 le toisième effet de durée $\boldsymbol{n_3}=\mathbf{30-15+3=18}$

L'équilibre des engagements permet d'écrire l'équation suivante

$$X-\frac{Xnt}{36000}=X_1-\frac{X_1n_1t}{36000}+X_2-\frac{X_2n_2t}{36000}+X_3-\frac{X_3n_3t}{36000}$$

$$X\left(1-\frac{nt}{36000}\right)=X_1\left(1-\frac{n_1t}{36000}\right)+X_2\left(1-\frac{n_2t}{36000}\right)+X_3\left(1-\frac{n_3t}{36000}\right)$$

D'où $X=\dfrac{X_1\left(1-\frac{n_1\times t}{36000}\right)+X_2\left(1-\frac{n_2\times t}{36000}\right)+X_3\left(1-\frac{n_3\times t}{36000}\right)}{\left(1-\frac{n\times t}{36000}\right)}$

Par suite $X=\dfrac{87000\left(1-\frac{36\times 9}{36000}\right)+99000\left(1-\frac{50\times 9}{36000}\right)+109000\left(1-\frac{18\times 9}{36000}\right)}{\left(1-\frac{28\times 9}{36000}\right)}=294550{,}86$

La valeur nominale de l'effet unique est de 294550,86 F.

EXERCICE 4 :

1. Etudions et représentons la fonction recette $\mathscr{R}$

$\mathscr{R}=-0{,}4x^2+8x\ ;D_{\mathscr{R}}=[0\,;+\infty[$

$\mathscr{R}'(x)=-0{,}8x+8\quad \mathscr{R}'(x)=0\Leftrightarrow x=10$

x	0		10		$+\infty$
$\mathscr{R}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{R}(x)$	0	$\nearrow$	40	$\searrow$	$-\infty$

2. L'ensemble des charges totales est la fonction $g(x)=25+x$

a. On resoud l'équation $\mathscr{R}(x)=g(x)$ avec $g(x)=25+x$

$\mathscr{R}(x)=g(x)\Leftrightarrow -0{,}4x^2+8x=25+x\Leftrightarrow -0{,}4x^2+8x-25-x=0\Leftrightarrow -0{,}4x^2+7x-25=0$

$\Delta=\mathrm{b}^2-4\mathrm{ac}=9;\ x_1=12{,}5$ et $x_2=5$; $g(12{,}5)=37{,}5$ et $g(5)=30$

Les points d'intersection sont : **(12,5; 37,5) et (5; 30)**

b. Déterminons graphiquement la zone correspondant à un gain

Le gain corrrespond à la zone où la parabole est au dessus de la droite d'équation $y=25+x$ (***partie hachur*ée**) .

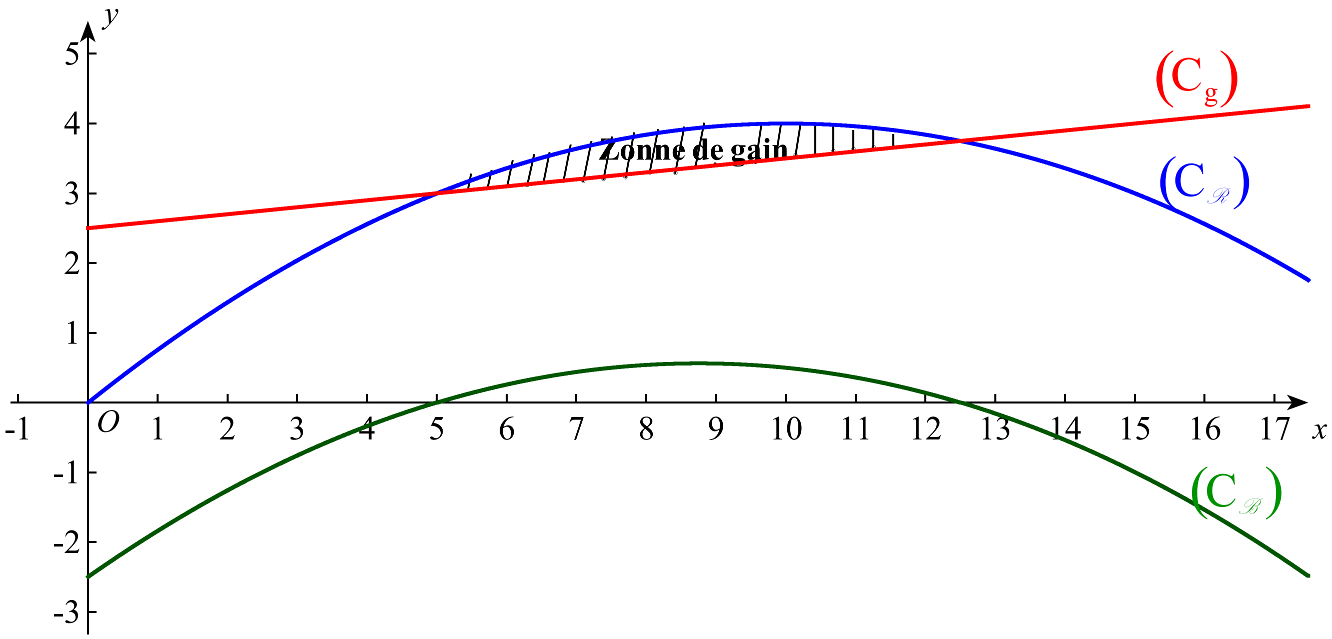
3. Déterminons la fonction bénéfice $\mathscr{B}$ et la représentons

$\mathscr{B}(x)=\mathscr{R}(x)-g(x)=-0{,}4x^2+7x-25$; $\mathscr{B}'(x)=-0{,}8x+7$; $\mathscr{B}'(x)=0\Leftrightarrow x=8{,}75$

x	0		$8{,}75$		$+\infty$
$\mathscr{B}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{B}(x)$	-25	$\nearrow$	$5{,}625$	$\searrow$	$-\infty$

Le bénéfice atteint son maximum pour $\boldsymbol{x=8{,}75}$ **millions de tonnes**

Ech : sur l'axe des ordonnées on prendra 1cm pour 10


y
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-1
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
x
Zonne de gain
(C_g)
$(C_{\mathscr{R}})$
$(C_{\mathscr{B}})$