

Exercice 1 : (6 points)

1. Une mère de 37 ans a trois enfants âgés de 8 ans, 10 ans et 13 ans.
Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants? Détermine alors l'âge respectif de chacun d'eux.
2. Le total des valeurs nominales de trois effets s'élève à 540 0000 *FCFA*; le total des valeurs nominales actuelles à 535710 *FCFA*. Sachant que les valeurs nominales sont proportionnelles à 4 ; 8 ; 6 et les échéances sont 45 ; 30 et 60 jours. Calcule :
 - a. Les valeurs nominales.
 - b. Le taux d'escompte.
3. Détermine la date d'échéance d'un effet de 14 320 *FCFA* qui se substituerait, le 10 novembre, à un effet de 14 200 *FCFA* payable le novembre. Taux d'escompte : 10%.

Exercice 2 : (4 points)

Un concurrent sur le marché des calculatrices estime que, chaque année, ses efforts lui permettent d'augmenter ses ventes de 5% par rapport à l'année précédente et que la concurrence lui fait perdre 10 000 ventes. En 2015, il en a vendu 600 000.

On note u_n le nombre de milliers de calculatrices vendues à l'année 2015 + n . On a donc $u_0 = 600$.

1. Montre, que pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,05u_n - 10$.
2. On pose $v_n = u_n - 200$.
 - a. Montre que la suite (v_n) est géométrique. Donne sa raison et son premier terme v_0 .
 - b. Exprime v_n en fonction de n . En déduis l'expression de u_n en fonction de n .
 - c. D'après ce modèle, combien de calculatrices cette entreprise vendra-t-elle en 2025 ?

Problème : (10 points)

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$$

1. Détermine le domaine de définition de f
2. Détermine trois nombres réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
3. Calcule les limites aux bornes du domaine de définition de f . Déduis-en les équations des asymptotes.
4. calcule $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f .
5. Etudie le signe de $f'(x)$. Déduis-en le sens de variations de f .
6. Construis la courbe représentative f dans un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 2$ cm et $OJ = 1$ cm..
7. Calcule l'aire en cm^2 de la portion du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

Exercice 1 :

1. Déterminons l'année à laquelle l'âge de la mère sera égal à la somme des âges de ses trois enfants

Soit x le nombre d'années qui doit s'écouler.

$$(8+x) + (10+x) + (13+x) = (37+x) \Rightarrow 31 + 3x = 37 + x$$

$$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = 3 \text{ ans}$$

Déterminons les âges respectifs

$(8+3)$; $(10+3)$; $(13+3)$ soit 11 ans ; 13 ans 16 ans

2^{ème} Méthode :

Dans Trois ans car

La mère a 37 ans

La somme des âges de ses enfants = $8 + 10 + 13 = 31$ ans

1^{ère} année la mère = 38 ans et ses enfants = $9 + 11 + 14 = 34$ ans

2^e année la mère = 39 ans et ses enfants = $10 + 12 + 15 = 37$ ans

3^e année la mère = 40 ans et ses enfants = $11 + 13 + 16 = 40$ ans

2. a. Les valeurs nominales sont :

Soit $(V_1; V_2; V_3)$ proportionnel à $(4; 8; 6)$ et $V_1 + V_2 + V_3 = 540\,000$

$$\frac{V_1}{4} = \frac{V_2}{8} = \frac{V_3}{6} = \frac{540\,000}{18} = 30\,000$$

$$V_1 = 30\,000 \times 4 \Rightarrow V_1 = 120\,000$$

$$V_2 = 30\,000 \times 8 \Rightarrow V_2 = 240\,000$$

$$V_3 = 30\,000 \times 6 \Rightarrow V_3 = 180\,000$$

- b. Le taux d'escompte est :

$$V_a = V - e \quad \text{avec } e = \frac{V \times t \times n}{36000}$$

$$V_{at} = V_{a1} + V_{a2} + V_{a3} \Leftrightarrow V_{at} = (V_1 - e_1) + (V_2 - e_2) + (V_3 - e_3)$$

$$e_1 = \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} = \frac{120\,000 \times t \times 45}{36000} = 150t$$

$$e_2 = \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000} = \frac{240\,000 \times t \times 30}{36000} = 200t$$

$$e_3 = \frac{V_3 \times t \times n_3}{36000} = \frac{180\,000 \times t \times 60}{36000} = 300t$$

$$V_{at} = (V_1 - e_1) + (V_2 - e_2) + (V_3 - e_3)$$

$$\Leftrightarrow 53\,5710 = (120\,000 - 150t) + (240\,000 - 200t) + (180\,000 - 300t)$$

$$\Leftrightarrow 53\,5710 = 540\,000 - 650t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4290}{650} = 6,6$$

$$t = 6,6\%$$

3. Déterminons la date d'échéance de l'effet:

$$V_1 = 14320 ; n_1 = ? ; V_2 = 14200 ; n_2 = 20 \text{ jours} ; t = 10\%$$

$$D = \frac{36000}{10} = 3600$$

$$V_1(D - n_1) = V_2(D - n_2) \Leftrightarrow 14200(3600 - n_1) = 14200(3600 - 20)$$

$$\Leftrightarrow 51552000 - 14320n_1 = 50836000$$

$$\Leftrightarrow n_1 = \frac{716000}{14320} = 50 \text{ jours}$$

C'est - à - dire la date d'échéance est le 30 décembre.

Exercice 2 :

1. Montrons que pour tout entier n ; $u_{n+1} = 1,05u_n - 10$ $u_0 = 600$;

$$u_1 = u_0 + 5\%u_0 - 10 \Rightarrow u_1 = u_0 (1+0,05) - 10 = 1,05 u_0 - 10$$

$$u_2 = u_1 + 5\%u_1 - 10 \Rightarrow u_2 = u_1 (1+0,05) - 10 = 1,05 u_1 - 10$$

$$u_3 = u_2 + 5\%u_2 - 10 \Rightarrow u_3 = u_2 (1+0,05) - 10 = 1,05 u_2 - 10$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$u_{n+1} = u_n + 5\%u_n - 10 \Rightarrow u_{n+1} = u_n(1+0,05) - 10 = 1,05u_n - 10$$

$$\text{d'où } u_{n+1} = 1,05u_n - 10$$

2. On pose $V_n = u_n - 200$

a. Montrons que la suite est géométrique , donnons sa raison et son 1^{er} terme V_0

$$V_{n+1} = u_{n+1} - 200 \Rightarrow V_{n+1} = 1,05u_n - 10 - 200 \Rightarrow V_{n+1} = 1,05u_n - 210$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1,05u_n - 210}{u_n - 200} = \frac{1,05(u_n - 200)}{u_n - 200} = 1,05$$

C'est une suite géométrique de 1^{er} terme $V_0 = 400$ et de raison $q = 1,05$.

b. Exprimons V_n et u_n en fonction de n

$$V_n = 400 (1,05)^n, n \text{ entier donc } u_n = 400 (1,05)^n + 200$$

c. Le nombre de calculatrice que l'entreprise vend en 2025 est :

$$n = 2025 - 2015 = 10$$

$$U_{10} = V_0 (1,05)^{10} + 200 \Leftrightarrow U_{10} = 400 (1,05)^{10} + 200 = 851,5578$$

$$\Rightarrow U_{10} = 851558 \text{ calculatrices}$$

Problème :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$$

1. Déterminons le domaine de définition Df de f

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}, x - 2 \neq 0\}$$

$$Df = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup] 2; +\infty[$$

2. Déterminons trois (3) nombres a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

Par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 3x & x - 2 \\ -2x^2 + 4x & \hline \hline x & = 2x + 1 \\ -x + 2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\text{D'où : } a = 2 ; b = 1 ; c = 2 \text{ et } f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x - 2}$$

Méthode par identification

Pour $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ avec a, b, c des réels

$$\text{On a : } f(x) = \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x-2} = \frac{ax^2 + (-2a+b)x - 2b + c}{x-2}$$

$$\text{Par identification } \begin{cases} a = 2 \\ -2a + b = -3 \\ -2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\text{D'où } f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-2}$$

3. Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition Df :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 1 + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 1 + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Déduisons les équations des asymptotes

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (2x + 1) = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique

4. Calculons $f'(x)$ de f

• A partir de $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-2}$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2[(x-2) - 1][(x-2) + 1]}{(x-2)^2} = \frac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} \text{ ou } f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2}$$

• A partir l'expression $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)(x-2) - (2x^2 - 3x)}{(x-2)^2} = \frac{4x^2 - 11x + 6 - 2x^2 + 3x}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2}$$

Etudions le signe de $f'(x)$ de f et en déduisons le sens de variations

le signe de $f'(x)$ est de celui de $2(x-3)(x-1)$ donc on a :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

Donc pour $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante.

Pour $x \in [1; 2[\cup]2; 3]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ est décroissante

Le tableau de variation :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$	9	$+\infty$	

NB: le tableau de variations n'est pas obligatoire pour préciser le sens de variations

- Construisons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$.
- Calculons l'aire en cm^2 de la portion du plan comprise entre la courbe f l'asymptote oblique et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 6$

$$A = \int_4^6 [f(x) - y] dx \times (1\text{cm} \times 2\text{cm})$$

$$= \int_4^6 \frac{2}{x-2} dx \times (1\text{cm} \times 2\text{cm}) = [2 \times 2 \times \ln|x-2|]_4^6$$

$$= 4\ln 2 \text{ cm}^2 \approx 2,7725 \text{ cm}^2$$

