Le sujet comprend 3 exercices tous obligatoire. Il comporte 1 page numérotée 1/1

Exercice 1 : .... (6 points)

1. Simplifiez les expressions suivantes :

a. $A = \ln(2^3) - \ln(24) + \ln\left(\frac{16}{9}\right)$ **(1 *pt*)**

b. $B = \ln\left(\frac{125}{81}\right) + \ln\left(\frac{9^2}{25}\right) - \ln 5$ **(1 *pt*)**

2. Résoudre dans IR les équations suivantes :

a. $2(\ln x)^2 - 3(\ln x) + 1 = 0.$ **(1 *pt*)**

b. $e^{3x} - e^{2x} = 0$ **(1 *pt*)**

3. Calcule la dérivée des fonctions f et g définies par :

a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ **(1 *pt*)**

b. $g(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ **(1 *pt*)**

Exercice 2 :.. (4 points)

Pour célébrer leur succès au bac six élèves d'une classe de TSS se donnent
Rendez-vous dans un restaurant de la ville. Il y a six restaurants au total dans la ville et chaque élève choisit au hasard un restaurant.

1. Quelle est la probabilité pour que chacun des six élèves ait choisit un restaurant différent ? (2pts)

2. Calcule la probabilité pour que les six élèves choisissent le même restaurant. (2pts)

Exercice 3 : .... (10 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x - 1}$

1. Détermine l'ensemble de définition de f. (2pts)

2. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (2pts)

3. Montre que $f\ (x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = 2x + \frac{2}{x-1}$ (1,5 pts)

4. Vérifier que la droite équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) de f. (1,5 pts)

5. Calcule $f\ '(x)$, dresse le tableau de variation de f puis trace (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ (3 pts)

EXERCICE 1 :

1. Simplifions les expressions

a. $A=\ln(2^3)-\ln(24)+\ln\left(\frac{16}{9}\right)=3\ln2-\ln3-3\ln2+4\ln2-2\ln3=4\ln2-3\ln3$ donc

$A=4\ln2-3\ln3$

b. $B=\ln\left(\frac{125}{81}\right)+\ln\left(\frac{9^2}{25}\right)-\ln5=3\ln5-4\ln3+4\ln3-2\ln5-\ln5=0\Longrightarrow B=0$

2. Resolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a. $2(\ln x)^2-3(\ln x)+1=0;\ D_v=]0\,;+\infty[$; posons $X=\ln x$.

On obtient $2X^2-3X+1=0$; $\Delta=b^2-4ac=1$; $X_1=\ln x=1$; $X_2=\ln x=\frac{1}{2}$; d'où $x=e>0$;

$x=e^{\frac{1}{2}}>0$; $\mathbf{S=\{\,e\,;e^{\frac{1}{2}}\,\}}$

b. $e^{3x}-e^{2x}=0$; $e^{2x}(e^x-1)=0\Leftrightarrow e^{2x}=0$ impossible ; $e^x-1=0\Longrightarrow x=0$; d'où $\mathbf{S=\{\,0\,\}}$

3. Calculons la dérivée des fonctions f et g

✓ $f(x)=2x^3-3x^2+5x-3$

Ensemble de définition de f : $D_f=\mathbb{R}$

$\forall\, x\in D_f=\mathbb{R}$; $f\,'(x)=6x^2-6x+5$

✓ $g(x)=\frac{2x-3}{x-2}$

Ensemble de définition de g : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$

$\forall\, x\in D_g,\ g(x)=\frac{u}{v}\Longrightarrow g'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$; d'où $g'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$

EXERCICE 2 :

Soit Ω l'univers des opérations, il y a possibilité d'être dans le même restaurant donc $\boldsymbol{card(\Omega)=6^6=46656}$

1. Chacun des six élèves ait choisit un restaurant différent, on a une permutation de 6 éléments; considérons A comme cet évènement, $card(A)=6!=720$

   $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{720}{46656}\Longrightarrow \boldsymbol{P(A)=\frac{5}{324}}$

2. Calculons la probabilité pour les élèves de choisir le même restaurant; considérons B comme cet évènement, $card(B)=6$

   $P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{6}{46656}=\frac{1}{7776}\Longrightarrow \boldsymbol{P(B)}=\frac{1}{7776}$

EXERCICE 3:

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{2(x^2-x+1)}{x-1}$

1. Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f

   $D_f=\{\,x\,/x\in\mathbb{R}\,;\,x-1\neq0\,\}$; $x-1\neq0\Longrightarrow x\neq1$; $\boldsymbol{D_f}=\mathbb{R}-\{\,\mathbf{1}\,\}=]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

2. Déterminons les limites aux bornes de D_f

   $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=+\infty$

3. Montrons que $f(x)=2x+\frac{2}{x-1}$

On a : $2x+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2x(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2[x(x-1)+1]}{x-1}=\dfrac{2(x^2-x+1)}{x-1}=f(x)\ (cqfd)$

4. Vérifions que la droite d'équation $y=2x$ est une asymptote à la courbe (C) de f

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[2x+\frac{2}{x-1}-2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x-1}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+\frac{2}{x-1}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x-1}\right]=0$$

donc la droite droite d'équation $y=2x$ est bien une asymptote à la courbe (C) de f.

5. Calculons $f'(x)$ et dressons son tableau de variation

$$f(x)=2x+\frac{2}{x-1}\Rightarrow f'(x)=2-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)^2-2}{(x-1)^2}=\frac{2[(x-1)^2-1]}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=\dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$; son signe est celui de $2x(x-2)$ car $(x-1)^2>0$ pour tout $x\in D_f$

$2x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Les extrémums:

$f(2)=-2$; $f(2)=6$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Traçons la courbe (C)