**Exercice 1 :** ............................................................................................................(**4** *points*)

Soit P la fonction polynôme définie par $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

1. Calcule $P(-2)$
2. Détermine les réels a , b et c tels que $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
4. En déduis la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :
   a. $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 13(\ln x) - 6 = 0$
   b. $2e^{3x} - e^{2x} - 13e^{x} - 6 = 0$

**Exercice 2 :** ............................................................................................................ (**6** *points*)

**1.** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Calcule $f(1)$ , $f(e)$ , $f(e^2)$ , $f(\frac{1}{e})$ *et* $f(e^3)$.

**2.** Soit g la fontin numerique définie par $g(x) = e^{-2x^2+1}$

**a.** Calcule $g'(x)$

**b.** Ecris l'équation de la tangente (T) à la courbe de g au point d'abscisse $x_0 = 0$

**Problème** : ............................................................................................................ (**10** *points*)

On note $f(x)$ la population ( en milliers ) d'une ville fondée en 1960, où $x$ désigne la durée écoulée depuis 1960, exprimée en années, $f(x) = \dfrac{60x+40}{x+10}$ pour $x \in [0; +\infty[$.

**1.** Détermine les nombres réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+10}$ pour $x \in [0; +\infty[$.

**2.** Calcule $f'$, fonction dérivée de $f$ puis justifie que la population croît.

**3.** **a.** Résoudre l'équation $f(x) = 52$ .

**b.** En déduis à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieure à 52 000 habitants.

**4.** Calcule la limite de f en $+\infty$. Donne une interprétation quand à la population de cette ville.

**5.** Trace la courbe $(C)$ de $f$ dans un repère $(O, I, J)$, unité graphique un centimètre pour 10 ans sur l'axe des abscisses et un centimètre pour 10000 habitants sur l'axe des ordonnées.

**Exercice 1:**

Soit P la fonction polynôme définie par $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

**1.** Calculons $P(-2)$

$P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) = -16 - 4 + 26 - 6 = 0$

**2.** Determinons les réels a,b et c tels que $P(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$.

***1ière Methode***

| | 2 | $-1$ | $-13$ | $-6$ |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | | $-4$ | 10 | 6 |
| | 2 | $-5$ | $-3$ | 0 |

$P(x) = (x+2)(2x^2 - 5x - 3)$

$a = 2$ ; $b = -5$; $c = -3$

***2ième Methode :***

$$P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$$
$$= ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)x + 2c$$

*Par identification*

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = -1 \\ c + 2b = -13 \\ 2c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -3 \end{cases}$$

***3ieme Methode :***

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 & x + 2 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 4x^2 \phantom{- 13x - 6} & 2x^2 - 5x - 3 \\ \cline{1-1} -5x^2 - 13x \phantom{- 6} & \\ 5x^2 + 10x \phantom{- 6} & \\ \cline{1-1} -3x - 6 & \\ 3x + 6 & \\ \cline{1-1} 0 \; + 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x+2)(2x^2 - 5x - 3)$

**3.** Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

$P(x) = 0 \Longrightarrow (x+2)(2x^2 - 5x - 3) = 0$

$x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \; ; \; x_2 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$S = \left\{-2 ; \frac{-1}{2} ; 3\right\}$

**4.** En deduisons

**a.** $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 13(\ln x) - 6 = 0$

$x \in ]0; +\infty[$

Posons $\ln x = X$

$X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$

$X = -2 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^{-2}$
$X = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^{3}$
$X = \frac{-1}{2} \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$
$S = \{e^{-2}; e^{3}; e^{-1/2}\}$

**b.** $2e^{3x} - e^{2x} - 13e^{x} - 6 = 0$
Posons $e^{x} = X$
$X^{3} - X^{2} - 13X - 6 = 0.$
$X = -2 \Rightarrow e^{x} = -2$ (imp)
$X = 3 \Rightarrow e^{x} = 3 \Rightarrow x = \ln 3$
$X = \frac{-1}{2} \Rightarrow e^{x} = -\frac{1}{2}$ (imp)
$S = \{\ln 3\}$

**Exercice 2 :**

**1.** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Calcilons :

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0 \; ; \; f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \; ; \; f(e^{2}) = \frac{\ln e^{2}}{e^{2}} = \frac{2}{e^{2}} \; ; \; f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln(\frac{1}{e})}{\frac{1}{e}} = -1 \times e = -e$$

$$f(e^{3}) = \frac{\ln e^{3}}{e^{3}} = \frac{3\ln e}{e^{3}} = \frac{3}{e^{3}}$$

**2.** $g(x) = e^{-2x^{2}+1}$

**a.** Calculons $g'(x)$
$g'(x) = -4xe^{-2x^{2}+1}$

**b.** Equation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$
$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$
$x_0 = 0 \Rightarrow y = g'(0)(x-0) + g(0)$
$g'(0); g(0) = e$
$y = 0(x) + e \Longrightarrow y = e$

**Problème:**

$f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où $x$ désigne la durée écoulée depuis 1960, exprimée en années, $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ pour $x \in [0; +\infty[$.

**1.** Déterminons les nombres réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$ ; pour $x \in [0;+\infty[$.

$$f(x) = a + \frac{b}{x+10} = \frac{a(x+10)+b}{x+10} = \frac{ax+10a+b}{x+10}$$

Par identification:

$$\begin{cases} a = 60 \\ 10a + b = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 60 \\ 600 + b = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 60 \\ b = -560 \end{cases}$$

$$f(x) = 60 - \frac{560}{x+10}$$

**2.** $f'(x) = -\left(\frac{-560}{(x+10)^{2}}\right) = \frac{560}{(x+10)^{2}} > 0$ (1,5pts) $\Longrightarrow \forall\ x \in [0; +\infty[; f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ d'où la population croit.

**3.** *a.* $f(x)=52$ $D_v = D_f = [0\ +\ \infty[$

$$f(x)=52 \Longrightarrow 60-\frac{560}{x+10}=52 \Longrightarrow -\frac{560}{x+10}=-8 \Longrightarrow \frac{560}{x+10}=8$$

$$560 = 8\,(x+10) \Rightarrow 560 = 8x+80 \Longrightarrow 560\text{-}80 = 8x \Longrightarrow 480 = 8x \Longrightarrow x=\frac{480}{8}=60$$

$S = \{60\}$.

*b.* $f(x) > 52 \iff x > 60$

*Après* $1960+60=2020$, *l*a population de cette ville sera superieure à 52 000 habitants ( ou à partir de 2021 )

**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 60-\dfrac{560}{x+10} = 60$ ( $1pt$ ) $\Longrightarrow$ la population de cette ville ne depassera jamais 60 000 habitants.

**5.** Courbe

tableau de variation

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $4 \nearrow 60$ |

$y = 60$ est une asymptote horizontale