Exercice 1

On considère le polynôme $P(x)=x^3+3x^2-4x-12$..

1. a. Calculer $P(-2)$

b. Compare $P(x)$ et $(x+3)(x-2)(x+2)$.

c. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.

2. utilise la première question pour résoudre dans $\mathbb{R}$,les équations suivantes:

a. $(\ln x)^3+3(\ln x)^2-4\ln x-12=0$ (ln désigne le logarithme néperien)

b. $e^{3x}+3e^{2x}-4e^x-12=0$.

Exercice 2

1. Calcule la dérivée des fonctions suivantes:

$f(x)=x^3-2x^2+5x-4$; $g(x)=x-\frac{1}{x}$; $h(x)=3+x\ln x$; $k(x)=e^{3x}-5x+3$.

2. Dans chacun des cas suivants, trouve une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

b. $f(x)=3x^2+2x-1$.

c. $f(x)=\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x$.

d. $f(x)=e^x-x^2+3$.

Problème

Soit la fonction numérique f définie par $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}$.

1. Détermine l'ensemble de défnition de f.

2. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Montre qu'il existe trois réels a,b et c telle que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

4. Montre que la droite (D) d'équation $y=x-2$ est asymptote à C_f

5. Calcule la dérivée f' de f puis étudie son signe.

6. Dresse le tableau de variation de f.

7. Trace la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Exercice 1 :

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

1. **a.** Calculons $P(-2)$

$P(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 0$

b. Comparons $P(x)$ à $(x+3)(x-2)(x+2)$

$(x+3)(x-2)(x+2) = (x+3)(x^2-4) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = P(x)$

c. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.

$S = \{-3; -2; 2\}$

2. Utilisons $1°)$ pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations:

a. $(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 4(\ln x) - 12 = 0$

L'ensemble de validité : $D_V =]0; +\infty[$

En posant $X = \ln x$ on a $X^3 + 3X^2 - 4X - 12 = 0$ qui admet comme solution : $X = -3$; $X = -2$ et $X = 2$

Pour $X = -3 \Rightarrow \ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$

Pour $X = -2 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

Pour $X = 2 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow S = \{e^{-3}; e^{-2}; e^2\}$

b. $e^{3x} + 3e^{2x} - 4e^x - 12 = 0$

En posant $X = e^x$, $X \in \mathbb{R}_+^*$;on a $X^3 + 3X^2 - 4X - 12 = 0$ qui admet comme solution:

$X = -3 \notin \mathbb{R}_+^*$; $X = -2 \notin \mathbb{R}_+^*$ et $X = 2 \in \mathbb{R}_+^*$

on a: $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$S = \{\ln 2\}$.

Exercice 2 :

1. Calculons la fonction dérivée des fonctions suivantes

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$g(x) = x - \dfrac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

$h(x) = 3 + x\ln x \Rightarrow h'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} \Rightarrow h'(x) = \ln x + 1$

$k(x) = e^{3x} - 5x + 3 \Rightarrow k'(x) = 3e^{3x} - 5$

2. Déterminons une primitive de chacune des fonctions suivantes

Soit F une primitive de f sur Df

a. $f(x) = x^2 + \dfrac{2x}{x^2+3} \Leftrightarrow F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \ln(x^2+3)$

b. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow F(x) = x^3 + x^2 - x$

c. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{4}x \Leftrightarrow F(x) = \dfrac{1}{20}x^4 - \dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{1}{8}x^2$

d. $f(x) = e^x - x^2 + 3 \Leftrightarrow F(x) = e^x - \dfrac{1}{3}x^3 + 3x$

Problème :

$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x+1}$

1. Déterminons le domaine de définition

$Df = \{x / x \in \mathbb{R};\, x+1 \neq 0\}$

Posons $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ d'où $Df = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

2. Les limites de f aux bornes de Df

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Etudions le signe de $x + 1$

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$	
$x+1$	$-$	$+$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x - 1}{x+1} = \frac{(-1)^2 - (-1) - 1}{-1+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x - 1}{x+1} = \frac{(-1)^2 - (-1) - 1}{-1+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

3. Montrons qu'il existe a; b; c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

***Première méthode*:**

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

Par identification $f(x) = f(x)$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \\ b + c = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$$

Deuxième méthode :

	1	-1	-1
-1		-1	2
	1	-2	1

Ainsi on a : $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$

***Troisième méthode*:**

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 1 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2 - x & \\ \cline{1-1} -2x - 1 & = \; x - 2 \\ 2x + 2 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Ainsi on a : $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$ $\Longrightarrow$ $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$

4. Montrons que la droite (D): $y = x - 2$ est asymptôte à la courbe de f

(D) est asymptôte à (C) ssi $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}(x-2)+\frac{1}{x+1}-(x-2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

donc $(D): y = x-2$ est asymptôte à (C).

5. Calculons la dérivée f' de f

Première forme **:** pour $\boldsymbol{f(x)=x-2+\frac{1}{x+1}}$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Deuxmière forme **:** pour $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}}$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x-1-x^2+x+1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Signe de la dérivée

Pour tout $x\in D_f$ $(x+1)^2>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que : $x(x+2)$.

Signe de $x(x+2)$

Posons $x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x+2=0 \Longrightarrow x=0$ ou $x=-2$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

6. Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7. Construisons (Cf) dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$