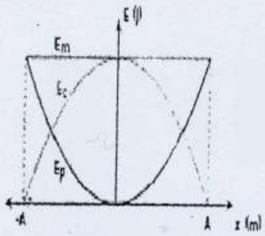
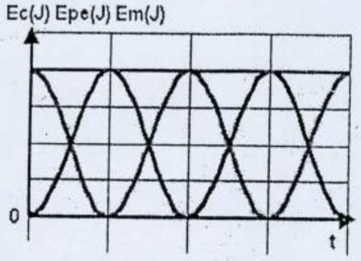
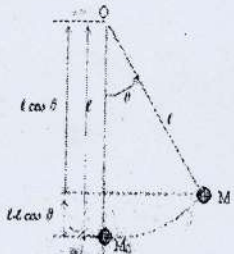
Cours de Physique

Terminales STI et Sciences

- ✓ Induction Electromagnétique – Auto induction
- ✓ Optique Physique
- ✓ Ondes Progressives
- ✓ Oscillations Libres
- ✓ Oscillations Forcées
- ✓ Effet Photoélectrique
- ✓ Niveaux d'Energies
- ✓ Radioactivité
- ✓ Effet Thermoélectronique





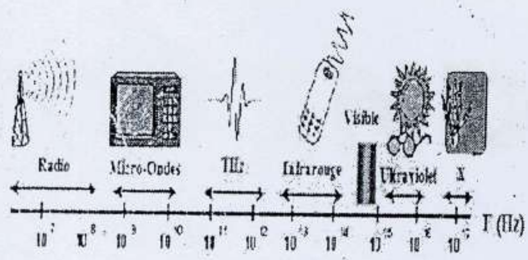
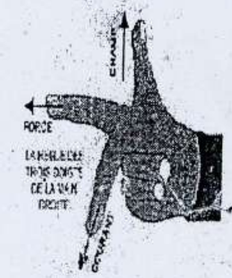
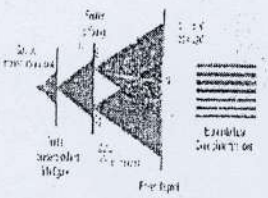
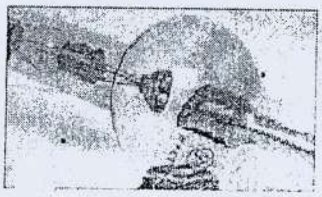
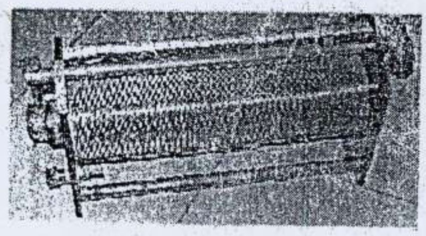


FIGURE 1 – Le spectre électromagnétique

Edition 2016

Kalidou MARICO

Ingénieur Electromécanicien – Master of Sciences en ingénierie

Professeur principal de Sciences Physiques au Lycée Technique de Bamako

Dr. Ismaïla KEITA

Docteur en Matériaux - Ingénieur en Matériaux, Mécanique, Energétique et Aéron

Maître-Assistant en Chimie - ENSup

Situation problème :

Lors d'une visite dans une unité industrielle, Ada a vu pl
machines. Le guide lui a parlé de générateur, de dyna
transformateur de phénomène permettant la transformat
circuits simples en générateurs.

Ada s'étonne bien du retard pris par le courant da
établissement et sa rupture dans certains circuits électriques.

Ada et ses amis veulent comprendre et s'approprier les phéno
question.

Situation problème :

Lors d'une visite dans une unité industrielle, Ada a vu plusieurs machines. Le guide lui a parlé de générateur, de dynamo, de transformateur de phénomène permettant la transformation de circuits simples en générateurs.

Ada s'étonne bien du retard pris par le courant dans son établissement et sa rupture dans certains circuits électriques.

Ada et ses amis veulent comprendre et s'approprier les phénomènes en question.

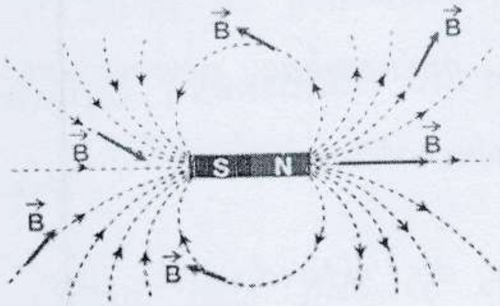
1. Ce qu'il faut savoir

1.1. Les définitions

- **Un aimant :** Est un corps qui attire le fer et les matériaux férro magnétiques. Il y a deux grands types d'aimants : les aimants permanents (ou naturels) et les aimants temporaires (ou artificiels).

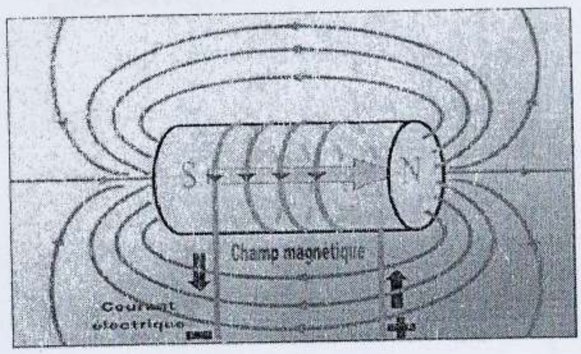
Exemples :

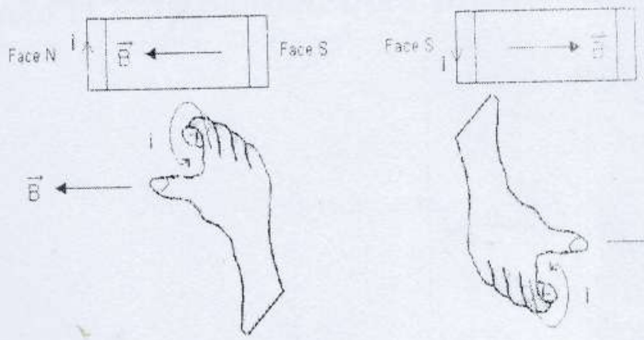
- **Aimants permanents :** le barreau aimanté



- **Aimants temporaires :** Ce sont les électro – aimants (bobines traversées par le courant)

Exemple : la bobine longue (solénoïde)





- **Caractéristiques de $\vec{B}$**
  - **Point d'application : tout point sur l'axe**
  - **Direction : axiale**
  - **Sens : de S vers N**
  - **Valeur : $B = \mu_0 ni$**

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$: Perméabilité magnétique ;

$n = \dfrac{N}{l} = \dfrac{1}{d_f}$: Nombre de spires par mètre ;

N : nombre de spires ; l : longueur de la bobine ; d_f : diamètre du fil conducteur.

- **La longueur de fil enroulé :**

$\mathcal{L} = Nl(spires) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = 2\pi NR$

- **La résistance de la bobine :**

$r = \rho \frac{\ell}{S_f}$ avec $S_f = \pi \frac{d_f^2}{4}$ $\Rightarrow$ $r = \rho \frac{2\pi NR}{\frac{\pi d_f^2}{4}}$

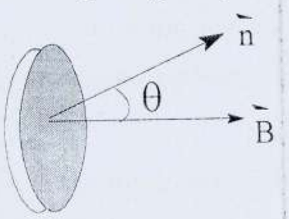
$$\boxed{r = 8\rho \frac{NR}{d_f^2}} \quad (\Omega)$$

$\rho_{Cu} = 1{,}6\,10^{-8}\,\Omega m$

- **Le flux d'induction :** est le nombre de lignes de champ à travers un circuit. C'est la grandeur

$$\boxed{\phi = S\vec{B}.\vec{n}}$$

S : section du circuit en m^2 ; $\vec{B}$: vecteur champ magnétique (T) ; $\vec{n}$: vecteur unitaire normal.



$$\boxed{\phi = SB\cos\theta} \quad (Wb) \quad (Webers)$$

Pour une bobine : $\phi = NSB\cos\theta$ (Wb) avec N : nombre de spires ; S : section d'une spires et θ est l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$.

- $\theta = 0$, le flux est maximal
- $\theta = \pi$, le flux est minimal
- $\theta = \frac{\pi}{2}$, le flux est nul

- **Le flux propre d'une bobine :** est le flux crée par cette bobine dans elle-même.

  $\phi = Li$ (Wb) avec L : l'inductance de la bobine

- **L'inductance ou la self d'une bobine :** est le coefficient de proportionnalité entre le flux propre et l'intensité du courant. Elle s'exprime en Henry (H).

$$\boxed{L = \frac{\theta}{i}} \quad (Henry)\ (H)$$

Pour un solénoïde $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$

- **La variation du flux :** est l'augmentation ou la diminution du flux d'induction

$$\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$$

La variation du flux propre : $\Delta\phi = L\Delta i$

NB : Comment faire varier le flux propre ?

De la formule $\phi = SB\cos\theta$ on constate qu'on peut faire varier le flux en faisant varier séparéme soit B ou θ.

- **L'induction électromagnétique :** est la naissance d'une force électromotrice induite dan circuit suite à la variation du flux d'induction.

<u>NB :</u>

- Un générateur est une source de tension électrique, il est caractérisé par sa f.é.m.
- La f.é.m. d'un générateur est la tension à vide de ce générateur notée : e (V)

<u>Exemples :</u> * générateurs de tension continue : pile, accumulateur, batterie.
* générateurs de tension alternative : alternateurs, dynamos

Dans l'induction il y a inducteur et induit.

- **L'inducteur :** est le circuit qui possède les lignes de champ ; c'est un aimant ou un électroaim
- **L'induit :** est le circuit dans lequel il y a variation du flux.
- **Le courant induit :** est le courant qui prend naissance dans un circuit fermé suite à la variat flux d'induction.
- **La f.é.m. induite** : est la f.é.m. créée dans un circuit suite à la variation du flux.
- **Un circuit inductif :** est un circuit comportant une bobine ; c'est un circuit (r, L).
- **L'auto – induction :** est la naissance d'une f.é.m. d'auto-induction dans un circuit indu passage d'un courant variable.
- **Le champ électromoteur :** est le champ électrique $\vec{E}_m$ qui prend naissance dans un conduc déplacement dans un champ magnétique.

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} \; ; \; E_m = vB\sin\alpha \text{ ou } E_m = \frac{e}{l} \quad (V/m)$$

- **Un transformateur :** est un appareil qui permet de modifier en même temps la ten l'intensité alternatives sinusoïdales. C'est une application de l'induction électromagnétique.
- **Un alternateur :** est une source de tension alternative sinusoïdale. Sa f.é.m. est sinusoïdale.
- **Le Courant de Foucault :** est un courant qui prend naissance dans une masse métall mouvement dans un champ magnétique ou placée dans un champ magnétique variable.

1.2. Différence entre induction et auto – induction :

La différence entre ces deux phénomènes est que :

- Dans l'induction électromagnétique il y a inducteur et induit qui sont différents a dans l'auto – induction, l'inducteur et l'induit sont les mêmes.
- Il y a induction chaque fois qu'il y a variation du flux (que le circuit soit fermé o inductif ou non) alors qu'il ne peut y avoir auto – induction que dans un circuit parcouru par un courant variable.

1.3. Enoncés des lois

1.3.1. Loi de Faraday

- **Hypothèse :** Toute variation du flux d'induction entraine la naissance d'une f.é.m.
- **Enoncé relatif à l'induction :** La f.é.m. d'induction est l'opposé de la dérivée du flux par rapport au temps $e = -\frac{d\phi}{dt}\ (V)$.

  Pendant une durée Δt, la f.é.m. moyenne induite est $e = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\ (V)$
- **Enoncé relatif à l'auto- induction :** la f.é.m. d'auto - induction est l'opposé de la dérivée du flux propre par rapport au temps $e = -L\frac{di}{dt}\ (V)$

  Pendant une durée Δt, la f.é.m. moyenne induite est $e = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}\ (V)$

1.3.2. Loi de Lenz :

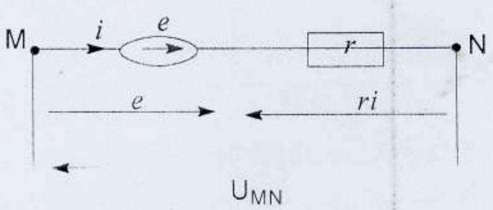
Elle permet de déterminer le sens du courant induit.

Enoncé de la loi de Lenz : Le sens du courant induit est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

1.3.3. Loi d'Ohm :

Elle traduit la relation entre la tension et l'intensité du courant.

- Relative à l'induction



La loi d'ohm s'écrit : $U_{MN} = ri - e$ avec i : courant induit et e : la f.é.m. induite.

Conséquences

- Circuit ouvert : $i = 0 \Rightarrow U_{MN} = -e$
- Circuit fermé (sur lui-même) : il y a court circuit dans ce cas $U_{MN} \approx 0$

$\Rightarrow ri - e = 0 \Rightarrow i = \frac{e}{r}$ (valeur algébrique).

- L'intensité du courant induit

$i = \frac{|e|}{r}\ (A)$; e : f.é.m. induite et r : résistance totale.

- La quantité d'électricité induite

$q = it$; pendant Δt, $q = i\Delta t$

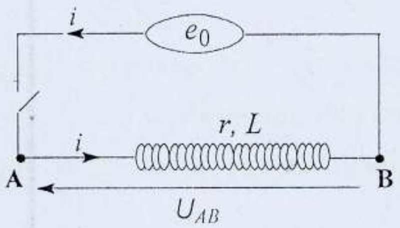
$$\begin{cases} i = \dfrac{|e|}{r} \\ |e| = \dfrac{|\Delta\phi|}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{|\Delta\phi|}{\Delta t \cdot r} \cdot \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{|\Delta\phi|}{r} \quad (C)$$

- Le nombre d'électrons en circulation

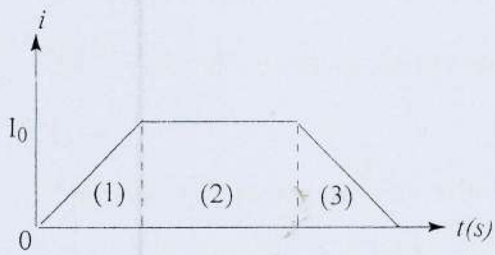
$q = 1{,}6\,10^{-19}\, n$

$$n = \frac{q}{1{,}6\,10^{-19}}$$

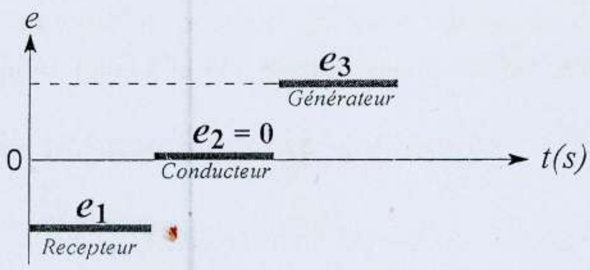
- Loi d'ohm relative à l'auto – induction : Soit un circuit inductif traversé par un courant i débité par un générateur de f.é.m. e_0. La tension aux bornes de A et B du circuit inductif : $U_{AB} = r$ avec e : la f.é.m. d'auto – induction.



Exemple : Si le circuit est parcouru par le courant i comme l'indique la figure suivante :



Le graphe de la f.é.m. d'auto - induction est :



- Energie magnétique emmagasinée : Lorsqu'un circuit inductif est traversé par un courant emmagasine une énergie magnétique $E_m = \dfrac{1}{2}Li^2$ (J)

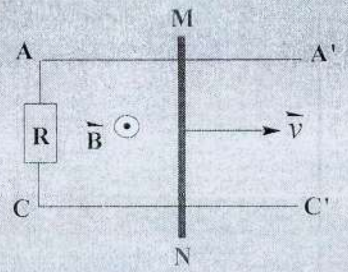
2. Ce qu'il faut savoir faire

2.1. Calculer les f.é.m. d'induction et d'auto – induction ; utiliser la loi de Lenz.

Application_ 1

La f.é.m. dans un conducteur MN

Un conducteur MN de longueur l = 25 cm peut rouler sans frottement sur 2 rails parallèles AA' et CC' à la vitesse constante v = 36Km/h. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire aux rails (figure ci – dessous).



1) A l'instant initial, le conducteur est confondu avec AC.

a) Exprime en fonction de ℓ et x (distance AM parcourue) la surface S balayée par le conducteur.

b) En déduis en fonction de l, B, x le flux coupé par le conducteur.

c) En appliquant la loi de Faraday, trouve la f.é.m. induite si B = 1T

2) Les rails sont reliés par une résistance de protection R = 0,5 Ω ; la résistance des rails est négligée et celle du conducteur MN est r = R.

a) Montre que MN est parcouru par un courant induit i lors de son déplacement.

b) Calcule l'intensité de ce courant.

c) Quel est l'effet de ce courant dans le conducteur. Généralise.

d) Caractérise cet effet (direction, sens et valeur). Justifie son sens.

e) Calcule la puissance de la force électromagnétique créée par le courant induit.

f) Calcule de 2 façons l'énergie développée par le conducteur lors de son déplacement en une minute à la vitesse constante $\vec{v}$.

g) Que se passe t – il lorsqu'on transmet de façon adiabatique cette énergie à 5g de glace à -10°C.

Solution

1) a) Expression de S

$$S = AM \times MN$$

$$\begin{cases} AM = x \\ MN = l \end{cases} \Rightarrow S = lx \ (m^2)$$

b) Déduction de l'expression de ϕ

$\phi = SB \Rightarrow \phi = Blx\ (wb)$

c) La f.é.m. induite

Faraday : $e = -\dfrac{d\phi}{dt} \Rightarrow e = -Bl\dfrac{dx}{dt}$

$\dfrac{dx}{dt} = v \quad \Rightarrow e = -Blv$

AN

$$\begin{cases} B = 1T \\ l = 25cm = 25 10^{-2}m \\ v = 36\,Km/h = 10m/s \end{cases} \Rightarrow e = -2{,}5V$$

2) **a) Démontrons :** *Il y a variation du flux d'induction dans le circuit fermé de MN, alors il y circu nécessairement un courant induit i.*

b) intensité de i

$$i = \frac{|e|}{r+R}$$

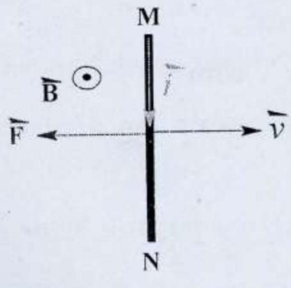
$$\begin{cases} |e| = 2{,}5\ V \\ r = R = 0{,}5\Omega \end{cases} \Rightarrow i = 2{,}5\,A$$

c) l'effet du courant dans MN

C'est la création d'une force électromagnétique de Laplace.

D'une façon générale : D'après Laplace, tout conducteur, placé dans un champ magnétique parcouru par un courant est nécessairement soumis à une force électromagnétique : $\vec{F} = l\vec{i} \wedge \vec{B}$

d) Caractéristiques de la force de Laplace



$$\vec{F} \begin{cases} \text{Point d'application : milieu de MN} \\ \text{Direction : celle de } \vec{v} \text{ (horizontale)} \\ \text{sens : opposé à } \vec{v} \\ \text{valeur : } F = Bil \end{cases}$$

AN : $F = 2{,}5 \times 25 10^{-2} \times 1 = 0{,}625\,N$

Justifions le sens de $\vec{F}$ *: La loi de Lenz (opposée à* $\vec{v}$*)*

Détermination du sens de i : D'après le sens de $\vec{F}$*, i va de M vers N.*

e) La puissance de $\vec{F}$

$P = F \cdot v$

$P = 0{,}625 \times 10 \quad \Rightarrow \quad P = 6{,}25\ Watts$

f) l'énergie

$Q = (R+r)i^2 t$

$Q = 1\times(2{,}5)^2\times 60 \quad \Rightarrow \quad Q = 375\ J$

$W = P\cdot t$

$W = 6{,}25\times 60 \quad \Rightarrow \quad W = 375\ J$

g) L'état physique final

$Q_0 = m_g c_g (0+10) = 510^{-3}\times 2100\times 10$

$Q_0 = 105\ J$

$Q_t = Q_0 + m_g L_g = 105 + 510^{-3}\times 33410^3$

$Q_t = 1775\ J$

$Q_0 \prec Q \prec Q_t$: *Il y a coexistence d'eau et de la glace à 0°C*

Masse de glace fondue

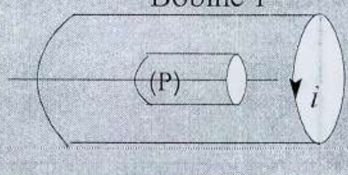
$$Q_{dispo} = Q_0 + xL_f \quad \Rightarrow \quad x = \frac{Q_{dispo} - Q_0}{L_f}$$

$$x = \frac{375-105}{334} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}8g$$

Application_2

La f.é.m. induite et sens du courant induit dans une bobine.

On considère deux bobines (figure)



- **Pour la bobine 1 (solénoïde) les caractéristiques sont :**
- **Nombre de spires : $N_1 = 1000$; longueur $l_1 = 1$m.**
- **Pour la bobine 2 (plate) les caractéristiques sont:**
- **Nombre de spires $N_2 = 200$**
- **Diamètre $d_2 = 10$ cm**

1) a) Caractérise le champ magnétique crée à l'intérieur du solénoïde lorsque celui-ci est parcouru par un courant i_1.

b) En déduire l'expression littérale du flux d'induction envoyé par la bobine 1 dans la bobine 2. Montre que ce flux d'induction est proportionnel à une constante M que l'on exprimera. Calcule la valeur de M. Précise son unité.

c) Calcule le flux d'induction pour $i_1 = 2A$

d) Que se passe t – il dans la bobine 2 :

- lors de la fermeture du circuit de la bobine 1,

- lors de l'ouverture du circuit de la bobine 1.

e) A quelle condition il y a t – il courant induit dans la bobine 2 ? Trouve son sens à la ferme et à l'ouverture du circuit de la bobine 1. Conclus

2) On annule le courant dans la bobine 1 en un laps de temps égale à 1/100s.

a) Calcule la f.é.m. induite dans la bobine plate.

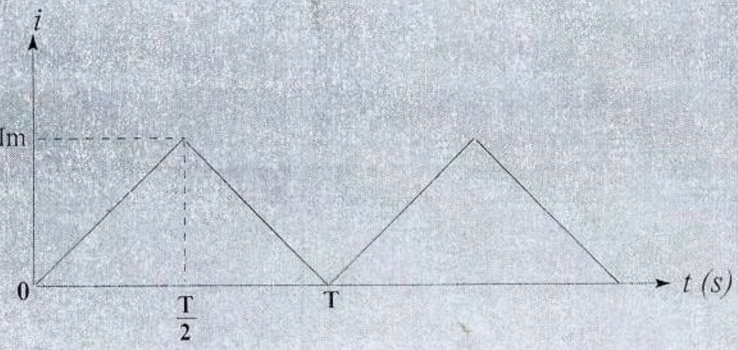
b) Calcule l'intensité du courant induit sachant que les deux bobines en cuivre sont fai partir du même conducteur $\rho_{Cu} = 1{,}6 10^{-8}\,\Omega m$

c) Calcule la quantité d'électricité induite dans la bobine plate.

d) En déduis le nombre d'électron en circulation.

3) Calcule la f.é.m. induite dans la bobine plate lorsque le solénoïde est parcouru pa courants successifs $i_1 = 5t + 2\ \ (A)$; $i_2 = 2\sqrt{2}\cos 100\pi t\ \ (A)$; $i_3 = -2t + 1\ \ (A)$

4) On fait passer dans le circuit du solénoïde un courant dont l'intensité varie comme l'inc le graphe suivant :



Im = 2A

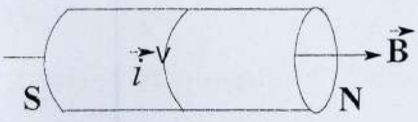
T = 10^{-2}s

a) Exprime dans chaque intervalle entre 0 et T, l'intensité du courant dans le solénoïde.

b) En déduis dans chaque intervalle de temps la f.é.m. induite dans la bobine plate.

c) Trace le graphe $e = f(t)$.

1) a) Le champ magnétique $\vec{B}$



$$\vec{B}\begin{cases} Point\ d'application : Tout\ point\ sur\ l'axe \\ Direction : Axiale \\ Sens : S \rightarrow N \\ Valeur : B = \mu_0 \dfrac{N_1}{l_1} i_1 \quad (T) \end{cases}$$

b) Expression du flux envoyé par la bobine 1 dans la bobine 2

$$\phi = N_2 S_2 B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \left(N_2 S_2\right)$$

$$\phi = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2 i_1$$

$$\begin{cases} \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \\ S_2 = \pi \dfrac{d^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad \phi = 4\pi 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{l_1} \pi \frac{d_2^2}{4} i_1$$

$$\phi = \pi^2 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{l_1} d_2^2 i_1$$

Démontrons

$$\begin{cases} \phi = M \cdot i_1 \\ \phi = \pi^2 10^{-7} \dfrac{N_1 N_2}{l_1} d_2^2 i_1 \end{cases} \Rightarrow \quad M = \pi^2 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{l_1} d_2^2$$

$$M - M \cdot i_1$$

Calcul de M : $M = \dfrac{\phi}{i_1} \quad (H)$

M = coefficient de mutuelle induction en Henry

$$M = 10 \times 10^{-7} \times 1000 \times 200 \times 10^{-2}$$

$$M = 2.10^{-3} \ (H)$$

$$\phi = 2.10^{-3} i_1$$

c) AN : valeur ϕ pour $i_1 = 2A$

$$\boxed{\phi = 4.10^{-3} \ wb}$$

d) ***A la fermeture et à l'ouverture du circuit de la bobine 1*** *: il y a variation du flux dans la bobine 2 entrainant la naissance d'une f.é.m. dans cette bobine.*

e) ***Il y a courant induit dans la bobine 2****, lorsque son circuit est fermé.*

- *Sens du courant induit dans la bobine 2 : en règle générale :*
- *A la fermeture du circuit inducteur bobine 1, le courant induit est opposé au courant inducteur.*
- *A l'ouverture du circuit inducteur, le courant induit a le même sens que le courant inducteur.*

2) a) La f.é.m. induite dans la bobine 2 :

D'après la loi Faraday : $e = -\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$, *or* $\phi = M \cdot i_1$

$$e = -M \frac{\Delta i}{\Delta t} \Rightarrow e = -2 \cdot 10^{-3} \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \Delta i_1 = 0 - 2 = -2A \\ \Delta t = \dfrac{1}{100} = 10^{-2} s \end{cases} \Rightarrow \quad e = -210^{-3} \left(\frac{-2}{10^{-2}} \right)$$

$$e = 0{,}4 \ (V)$$

b) l'intensité de i

$$i = \frac{|e|}{r_2}$$

Recherche de r_2

$$r_2 = \rho \frac{\mathcal{L}_f}{S_f}$$

$$\mathcal{L}_f = \pi d_2 N_2$$

$$S_f = \frac{\pi d_f^2}{4} \text{ avec } d_f = \frac{\ell_1}{N_1} \Rightarrow S_f = \frac{\pi \ell_1^2}{4N_1^2}$$

$$r_2 = \rho \frac{\pi d_2 N_2 \cdot 4 \cdot N_1^2}{\pi \cdot \ell_1^2}$$

$$r_2 = 4\rho \frac{N_1^2 \cdot N_2 \cdot d_2}{\ell_1^2}$$

<u>**NB :**</u> $\frac{1}{d_f} = \frac{N_1}{\ell_1} = n_1$

$AN:$ $r_2 = 4 \times 1{,}6.10^{-8} \times 10^6 \times 2.10^2 \times 10^{-1}$

$$r_2 = 1{,}3\ \Omega$$

$$i = \frac{0{,}4}{1{,}3} \Rightarrow i = 0{,}31\ (A)$$

c) La quantité d'électricité

$$q = i\Delta t = 0{,}31 \times 10^{-2}$$

$$q = 3{,}1 \times 10^{-3}\ C$$

d) Le nombre d'électron

$$q = 1{,}6.10^{-19} \times n \Rightarrow n = \frac{q}{1{,}6.10^{-19}} = \frac{3.1.10^{-3}}{1{,}6.10^{-19}}$$

$$n = 1{,}94 \times 10^{16}$$

3. La f.é.m. dans la bobine 2

D'après Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt}$; $\phi = Mi$

$$e = -M\frac{di}{dt} \Rightarrow e = -2.10^{-3}\frac{di}{dt}$$

Pour $i_1 = 5t + 2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = 5 \Leftrightarrow e_1 = -10^{-2}\ V$

$i_2 = 2\sqrt{2}\cos 100\pi t \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = -200\pi\sqrt{2}\sin 100\pi t \Leftrightarrow e_2 = -2.10^{-3}\left(-2.10^{-2}\right)\pi\sqrt{2}\sin 100\pi t$

$e_2 = -0{,}4\pi\sqrt{2}\sin 100\pi t$

$i_3 = -2t + 1 \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = 2 \Leftrightarrow e_3 = 4.10^3\, V$

4. Expression de i(t)

$i = at + b$

Pour $t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$

à $t = 0, \quad i_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$

à $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{10^{-2}}{2} = 5.10^{-3} s, \quad i_1 = I_m = 2A$

$2 = 5.10^{-3} a_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{2.10^3}{5} = 400 \Rightarrow i_1 = 400t \ (A)$

Pour $t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right]$

$i_2 = a_2 t + b_2$

à $t = \dfrac{T}{2} = 5.10^{-3} s, \quad i_2 = 2A$

$2 = 5.10^{-3} a_2 + b_2 \quad (1)$

à $t = T = 10.10^{-3} s, \quad i_2 = 0$

$0 = 10.10^{-3} a_2 + b_2 \quad (2)$

$$\begin{cases} 10.10^{-3} a_2 + b_2 = 0 \\ 5.10^{-3} a_2 + b_2 = 2 \quad \times(-) \end{cases}$$

$5.10^{-3} a_2 = -2$

$a_2 = -400$

$10.10^{-3} \times (-400) + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 4$

$i_2 = -400t + 4$

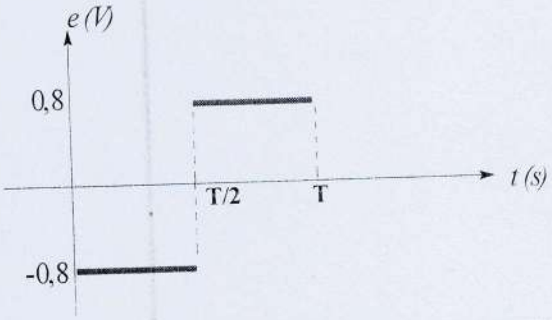
b) La f.é.m. induite

$e = -M\dfrac{di}{dt} \Rightarrow e = -2.10^{-3}\dfrac{di}{dt}$

$e_1 = -2.10^{-3}\dfrac{di_1}{dt} \Rightarrow e_1 = -2.10^{-3} \times 400 \Rightarrow e_1 = -0{,}8V$

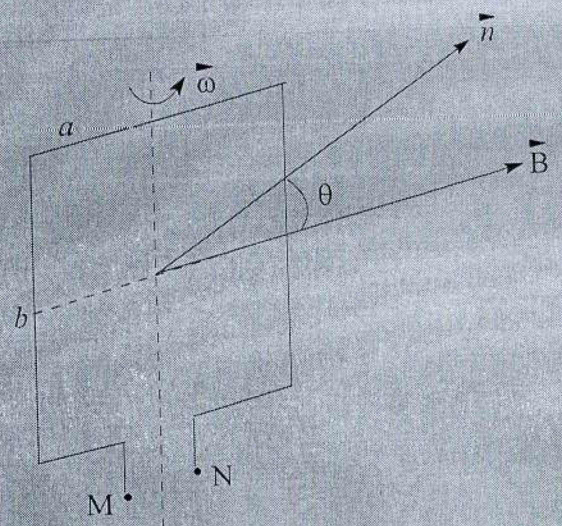
$$e_2 = -2.10^{-3}\frac{di_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad e_2 = 0{,}8V$$

c) Le graphe e = f(t)



Application _ 3

La f.é.m. induite dans une bobine en rotation uniforme dans un champ magnétique



$a = 5cm$

$b = 10cm$

$N = 1000\,spires$

Une bobine rectangulaire de dimensions *a* et *b* comportant N spires effectue de façon uniforme 3000 tours par minute dans un champ magnétique uniforme de valeur 10^{-2}T. A l'instant initial le vecteur champ magnétique est perpendiculaire au plan de la bobine dans le sens positif.

1) Exprime le flux d'induction à travers la bobine à un instant *t*.

2) En déduis l'expression de la f.é.m. induite dans la bobine en rotation.

3) Trouve l'expression de la tension aux bornes de l'alternateur.

Précise les valeurs maximale et efficace de cette tension.

Solution

1) Le flux d'induction à travers la bobine

$\phi = NBS\cos\theta$

$\theta = wt + \theta_0$

$\phi = NBS\cos(wt + \theta_0)$

à $t=0$, $\vec{B} \perp$ à la section de la bobine $\Rightarrow \vec{B} // \vec{n}$ alors $\theta_0 = 0$

$\phi = NBS \cos wt \quad (wb)$

2) **Déduction de e :**

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad e = wNBS \sin wt \quad (V)$$

3) **Expression de u(t)**

$$u = -e \quad \Rightarrow \quad u = -wNBS \sin wt \quad (V)$$

$$\begin{cases} U_m = wNBS \\ U_{eff} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{w\,NBS}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

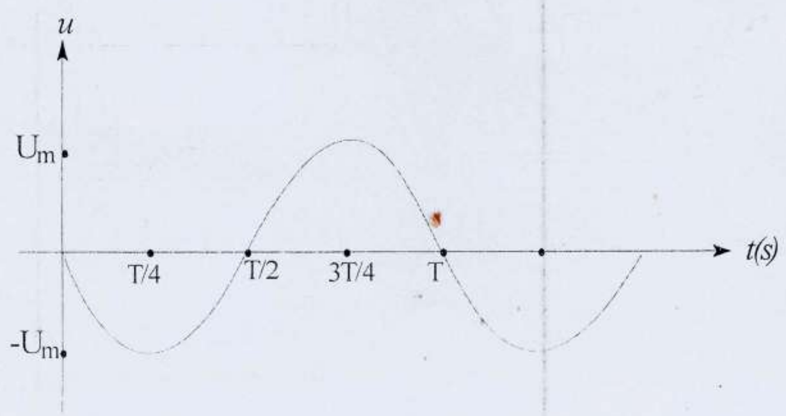
$$AN: \begin{cases} w = 2\pi n = 2\pi \times \dfrac{3000}{60} = 100\pi \, rd/s \\ N = 10^3 \\ S = ab = 5\,10^{-2} \times 10^{-1} = 5\,10^{-3}\, m^2 \\ B = 10^{-2}\, T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u = -100\pi \times 10^3 \times 5\,10^{-3} \times 10^{-2} \sin 100\pi t$$

$$u = -15{,}7 \sin 100\pi t$$

$$\begin{cases} U_m = 15{,}7 \ (V) \\ U_{eff} = \dfrac{15{,}7}{\sqrt{2}} = 11{,}10 \ (V) \end{cases}$$

Graphe de u(t) : $u = -U_m \sin \dfrac{2\pi}{T} t$

T	0	T/4	T/2	3T/4	T
u	0	$-U_m$	0	U_m	0



2.2. Déterminer le sens du courant induit

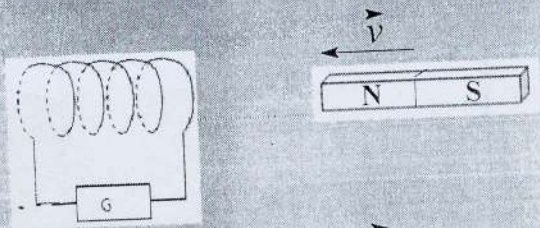
Application _ 1

Le sens du courant induit dans une bobine au voisinage d'un aimant

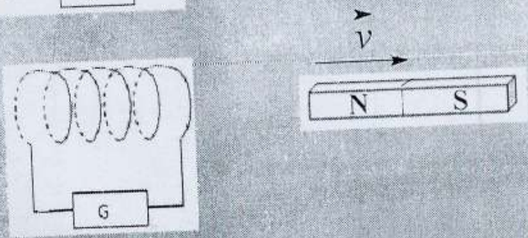
Consigne : En règle générale lorsqu'on approche le pôle nord d'un aimant à une bobine, la face en regard de la bobine devient nord et lorsqu'on éloigne le pôle nord d'un aimant la face en regard devient sud. Lorsqu'on approche le pôle sud la face en regard devient sud.

Détermine dans chaque cas s'il y a lieu le sens du courant induit

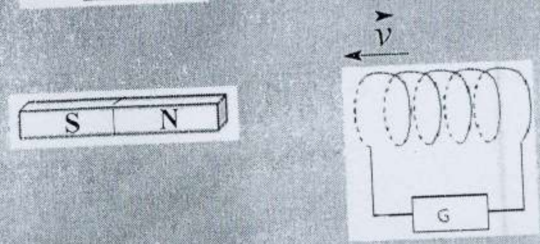
a)



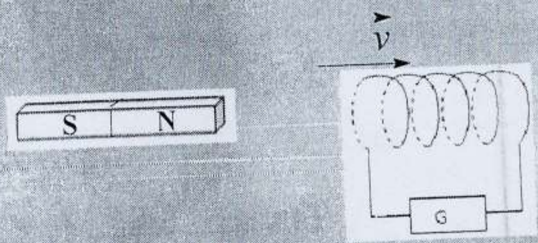
b)



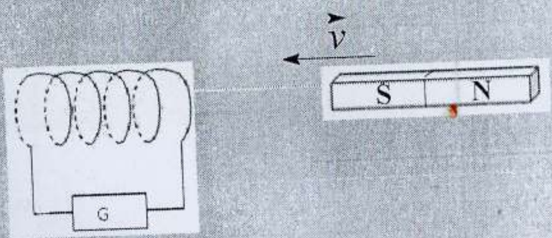
c)



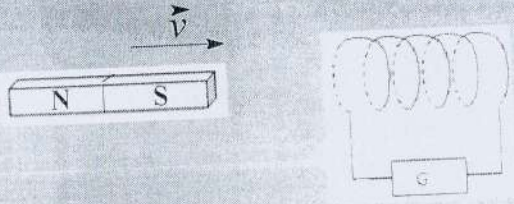
d)



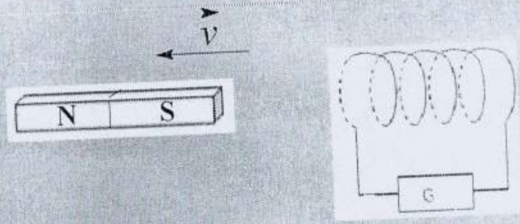
e)



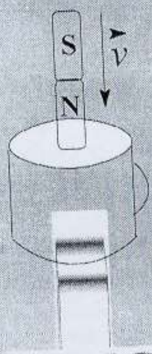
f)



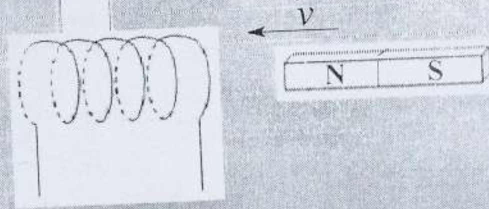
g)



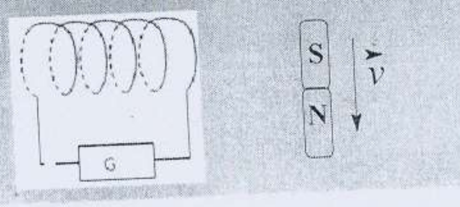
h)



i)



j)



Application _ 2

Détermination du sens du courant induit par orientation d'un circuit.

1. a) Que signifie orienter un circuit ?

b) Comment orienter un circuit ?

c) Que signifie $i > 0$?

d) Dans quel cas $i > 0$?

2. Dans chacun des cas suivants, la normale étant donné, orienter le circuit, déterminer le sens du courant induit.

Solution

1. a) Orienter un circuit c'est lui donner un sens positif.

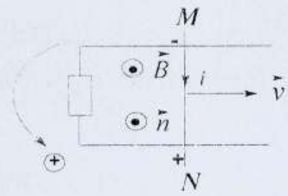
b) On oriente un circuit à l'aide de la normale à ce circuit.

c) $i > 0$ ce qui-indique que i circule dans le sens positif choisi

d) Lorsque :

- *Le flux augmente $\Delta\phi \succ 0$ on a : $e \prec 0$ et $i \prec 0$*
- *Le flux diminue $\Delta\phi \prec 0$ on a : $e \succ 0$ et $i \succ 0$*

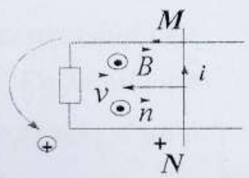
a)



$\phi = SB$

$S \nearrow$ $\Delta\phi > 0$ donc $i < 0$

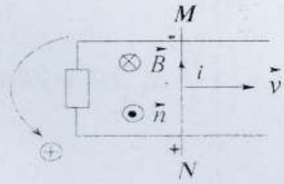
b)



$\phi = SB$

$S \searrow$ $\Delta\phi < 0$ donc $i > 0$

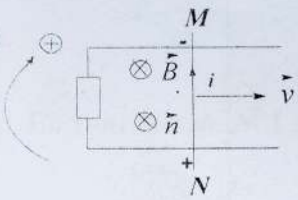
c)



$\phi = - SB$

$S \nearrow$ $\Delta\phi < 0$ donc $i > 0$

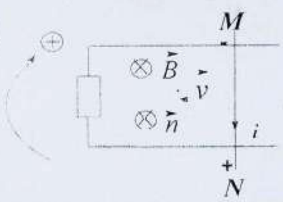
d)



$\phi = SB$

$S \nearrow$ $\Delta\phi > 0$ donc $i < 0$

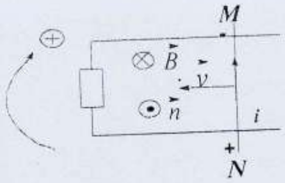
e)



$\phi = SB$

$S \searrow$ $\Delta\phi < 0$ donc $i > 0$

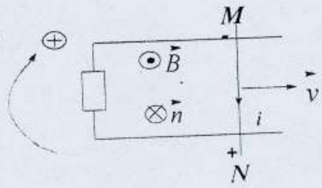
f)



$\phi = - SB$

$S \rightarrow \Delta \quad \phi > 0$ donc $i < 0$

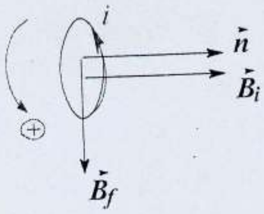
g)



$\phi = - SB$

$S \rightarrow \Delta \quad \phi < 0$ donc $i > 0$

i)

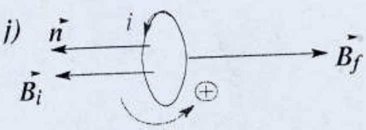


$B_i = B_f = B$

$\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$

$$\begin{cases} \phi f = 0 \\ \phi i = SB \end{cases} \Rightarrow \Delta\phi = -SB \prec 0 \text{ donc } i \succ 0$$

j)

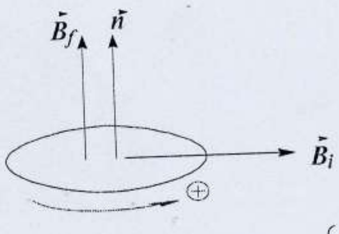


$B_i = B_f = B$

$\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$

$$\begin{cases} \phi f = -SB \\ \phi i = SB \end{cases} \Rightarrow \Delta\phi = -2SB \prec 0 \text{ donc } i \succ 0$$

k)

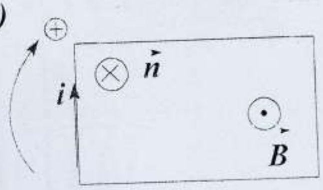


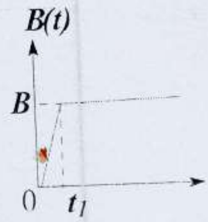
$B_i = B_f = B$

$\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$

$$\begin{cases} \phi f = SB \\ \phi i = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta\phi = SB \succ 0 \Rightarrow i \prec 0$$

m)





$$\begin{cases} \phi f = -SB \\ \phi i = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta\phi = -SB \prec 0 \Rightarrow i \succ 0$$

2.3. Calculer la f.é.m. d'auto induction - Déterminer la tension aux bornes d'un circuit inductif

Application _ 1

1. Etablis l'expression de l'inductance d'un solénoïde

a) En fonction de N, ℓ et S

b) En fonction de N, ℓ, R

c) En fonction de N, ℓ, *d*

d) En fonction de *n*, ℓ, *d*

e) En fonction de ℓ, d_f, *d*

e) En fonction de L et ℓ

N : nombre de spires ; *n* = nombre de spires par mètre ; *d* = diamètre d'une spire ; ℓ = longueur de la bobine ; S = section d'une spire ; R = rayon d'une spire ; d_f = diamètre du fil conducteur ; L = longueur totale enroulée

2. a) Un solénoïde a pour longueur 1m, pour diamètre 10 cm avec un nombre de spires égal à 1000. Calcule son inductance.

b. Trouve la f.é.m. d'auto-induction lorsque cette bobine est traversée successivement par les courants d'intensités : $i_1 = 2A$; $i_2 = 5t + 2$; $i_3 = -2t + 1$; $i_4 = 2\sqrt{2}\cos 100\pi t$.

Solution

1. *L'expression de l'inductance d'un solénoïde*

   a) *En fonction de N, ℓ et S*

Le flux propre d'un solénoïde.

$$\begin{cases} \phi = Li \\ \phi = NBS = NS\left(\mu_0 \dfrac{N}{\ell} i\right) = \mu_0 \dfrac{N^2}{\ell} Si \end{cases} \Rightarrow Li = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} Si$$

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S \qquad (H)}$$

   b) *En fonction de N, ℓ et R*

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S \quad \begin{cases} \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \\ S = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow L = 4\pi 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} \pi R^2$$

$$\boxed{L = 4\pi^2 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} R^2 \qquad (H)}$$

c) En fonction de N, ℓ et d

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$$

$$\begin{cases} \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \\ S = \pi \dfrac{d^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad L = 4\pi 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} \pi \frac{d^2}{4}$$

$$\boxed{L = \pi^2 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} d^2 \qquad (H)}$$

d) En fonction de n, ℓ et d

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$$

$$\begin{cases} \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \\ S = \pi \dfrac{d^2}{4} \\ n = \dfrac{N}{\ell} \Rightarrow N = n\ell \end{cases} \Rightarrow \quad L = 4\pi 10^{-7} \frac{n^2 \ell^2}{\ell} \pi \frac{d^2}{4}$$

$$\boxed{L = \pi^2 10^{-7} n^2 \ell d^2 \qquad (H)}$$

e) En fonction de ℓ, df et d

$$L = \pi^2 10^{-7} n^2 \ell d^2$$

$$\frac{N}{\ell} = n = \frac{1}{d_f} \Rightarrow L = \pi^2 10^{-7} \frac{1}{d_f^2} \ell d^2$$

$$\boxed{L = \pi^2 10^{-7} \left(\frac{d}{d_f}\right)^2 \ell \qquad (H)}$$

NB :

$$n = \frac{N}{\ell} = \frac{k}{d_f}$$

f) En fonction de L et ℓ et R

$$L = \pi^2 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} d^2$$

$$\mathcal{L} = N P_s = \pi d N \Rightarrow N = \frac{\mathcal{L}}{\pi d} \Rightarrow L = \pi^2 10^{-7} \frac{\mathcal{L}^2}{\pi^2 d^2 \ell} d^2$$

$$\boxed{L = 10^{-7} \frac{\mathcal{L}^2}{\ell} \qquad (H)}$$

2. a) *Calcul de L*

$L = \pi^2 10^{-7} \dfrac{N^2}{\ell} d^2$

AN :

$$\begin{cases} \pi^2 = 10 \\ N = 1000 \\ \ell = 1m \ ; \ d = 10cm = 10^{-1}m \end{cases} \Rightarrow L = 10 \times 10^{-7} \times 10^{6} \times 10^{-2}$$

$$\boxed{L = 10^{-2} \ (H)}$$

b) *La f.é.m. d'auto induction*

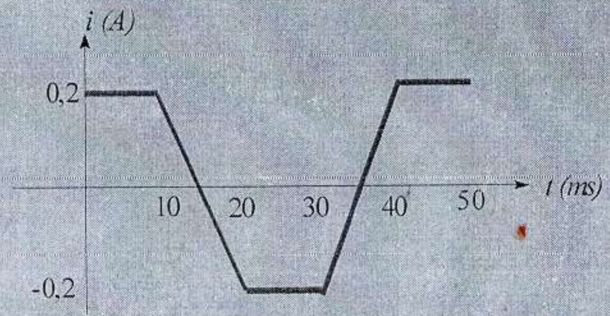
Faraday : $e = -L\dfrac{di}{dt}$

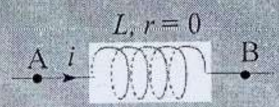
- $i_1 = 2A \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = 0 \Rightarrow e_1 = 0$
- $i_2 = 5t + 2 \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = 5 \Rightarrow e_2 = -510^{-2} \ (V)$
- $i_3 = -2t + 1 \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = -2 \Rightarrow e_3 = 210^{-2} \ (V)$
- $i_4 = 2\sqrt{2}\cos 100\pi t \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = -200\pi\sqrt{2}\sin 100\pi t \Rightarrow e_2 = 2.10^2\pi\sqrt{2}\sin 100\pi t \ (V)$

Application _ 2

La f.é.m. d'auto induction – la loi d'Ohm

Une bobine d'inductance L = 400 mH et de résistance négligeable est traversée par un courant i dont l'intensité varie selon le graphe suivant :





a) Trouve l'expression du courant en fonction du temps dans chaque intervalle de temps entre 0 et 40 ms.

b) Calcule la f.é.m. d'auto – induction dans chaque intervalle de temps.

c) Trace le graphe de $e = f(t)$.

d) Exprime la tension aux bornes de la bobine dans chaque intervalle de temps. Trace le graphe $u = f(t)$.

e) Calcule l'énergie magnétique maximale emmagasinée par la bobine.

Solution

a) Expression de i(t)

Dans chaque intervalle de temps i est une droite alors : $i = at + b$

Pour $t \in [0,\ 10]ms$

$i_1 = 0{,}2A$

Pour $t \in [10,\ 20]ms$

$i_2 = a_2t + b_2$

$\grave{a}\ t = 10\,ms = 10^{-2}s\ ;\ i_2 = 0{,}2A \quad \Rightarrow \quad 10^{-2}a_2 + b_2 = 0{,}2 \qquad (1)$

$\grave{a}\ t = 20\,ms = 210^{-2}s\ ;\ i_2 = -0{,}2A \quad \Rightarrow \quad 210^{-2}a_2 + b_2 = -0{,}2 \qquad (2)$

$$(1)\ et\ (2) \Rightarrow \begin{cases} 210^{-2}a_2 + b_2 = -0{,}2 \\ 210^{-2}a_2 + b_2 = 0{,}2 \quad - \end{cases}$$

$$10^{-2}a_2 = -0{,}4 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -40$$

$10^{-2}a_2 + b_2 = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 0{,}2 - 10^{-2}a_2 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 0{,}6$

$i_2 = -40t + 0{,}6 \quad (A)$

Pour $t \in [20,\ 30]ms$

$i_3 = -0{,}2A$

Pour $t \in [30,\ 40]ms$

$i_4 = a_4t + b_4$

$\grave{a}\ t = 30\,ms = 310^{-2}s\ ;\ i_4 = -0{,}2A \quad \Rightarrow \quad 310^{-2}a_2 + b_2 = -0{,}2 \qquad (1)$

$\grave{a}\ t = 40\,ms = 410^{-2}s\ ;\ i_4 = 0{,}2A \quad \Rightarrow \quad 410^{-2}a_2 + b_2 = 0{,}2 \qquad (2)$

$$(1)\ et\ (2) \Rightarrow \begin{cases} 410^{-2}a_4 + b_4 = 0{,}2 \\ 310^{-2}a_4 + b_4 = -0{,}2 \quad - \end{cases}$$

$$10^{-2}a_4 = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 40$$

$410^{-2}(40) + b_4 = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad b_4 = -1{,}4$

$i_4 = 40t - 1{,}4 \quad (A)$

b) La f.é.m. d'auto induction

La loi de Faraday : $e = -L\dfrac{di}{dt} = -0{,}4\dfrac{di}{dt}$

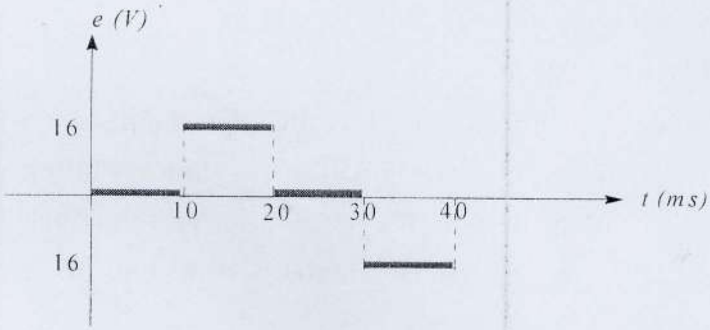
Pour $i_1 = 2A \quad \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1 = 0$

Pour $i_2 = -40t + 0{,}6 \quad \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = -40 \quad \Rightarrow \quad e_2 = 16 \ (V)$

Pour $i_3 = -0{,}2A \quad \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_3 = 0$

Pour $i_4 = 40t - 1{,}4 \quad \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = 40 \quad \Rightarrow \quad e_4 = 16 \ (V)$

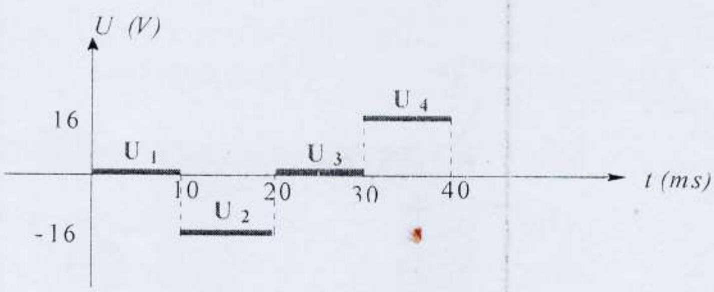
c) Graphe de $e = f(t)$



d) La tension

Loi d'Ohm : $U = ri - e$ on a $r = 0 \quad \Rightarrow \quad U = -e$

$$\begin{cases} U_1 = 0 \ (V) \\ U_2 = -e_2 = -16V \\ U_3 = 0 \ (V) \\ U_4 = 16V \end{cases}$$



e) L'énergie emmagasinée maximale

$Em = \dfrac{1}{2}Li^2$

$$Em(\max) = \frac{1}{2} Li_{\max}^2 = \frac{1}{2} 410^{-2}\left(2.10^{-1}\right)^2$$

$$Em(\max) = 810^{-4} J$$

2.4. Déterminer les applications de l'induction et de l'auto induction

Les applications de l'induction sont : *Les transformateurs, les alternateurs, le courant Foucault, onduleurs (Auto – induction).*

Application _ 1

Détermination des transformateurs

1) a) Décris un transformateur.

b) Donne son principe de fonctionnement.

c) Définis le coefficient de transformation.

d) En déduis le classement des transformateurs ; donne dans chaque cas quelques usages.

2) Un transformateur comporte au primaire 350,50 spires et au secondaires 2750 spires.

a) Calcule son coefficient de transformation. S'agit – il d'un sous voltage ou d'un sur voltage ?

b) On applique aux bornes de ce transformateur une tension alternative sinusoïda $U_1 = 220\sqrt{2}\cos 100\pi t$.

En déduis les tensions efficaces au primaire et au secondaire.

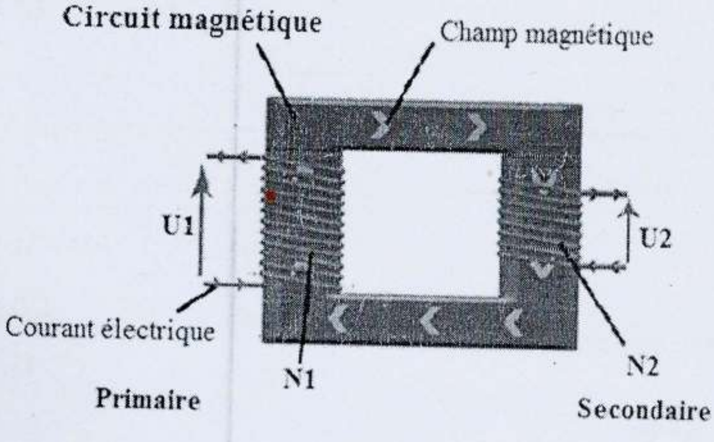
c) L'intensité du courant dans le secondaire étant 10A trouve l'intensité au primaire.

d) Calcule les puissances au primaires et au secondaires sachant que $\cos\varphi_1 = 0,95$ **et** $\cos\varphi_2 = 0,9$

En déduis le rendement de ce transformateur.

Solution

1. a) Description du transformateur



Le transformateur comprend 3 parties : **Le primaire, le secondaire et le circuit magnétique**.

- *Le primaire* est un bobinage comportant N_1 tours de fil enroulés autour du circuit magnétique. Il permet l'alimentation du transformateur.
- *Le secondaire* est un bobinage comportant N_2 tours de fil enroulés autour du circuit magnétique. Il permet d'alimenter les installations extérieures.
- *Le Circuit magnétique* est un cadre en fer doux qui permet de faire circuler les lignes de champs du primaire au secondaire.

b) Le principe de fonctionnement

Son principe est basé sur l'induction électromagnétique. Lorsque le primaire est branché à une source de tension alternative sinusoïdale, il y circule un courant alternatif sinusoïdal qui crée un champ alternatif sinusoïdal ; les lignes de ce champ, canalisés par le circuit magnétique arrivent au secondaire ou elles provoquent un flux variable. Cela entraine la naissance d'une f.é.m. induite et par conséquent une tension alternative u_2 de valeur efficace U_2 apparait aux bornes du secondaire.

c) le coefficient de transformation

C'est le quotient k du nombre de spire N_2 du secondaire par le nombre de spire N_1 du primaire :

$$k = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

Déduction : Les transformateurs sont classés et utilisés en fonction de leur coefficient de transformation. On distingue :

- *Les survolteurs :* $k \succ 1 \Rightarrow U_2 \succ U_1$. Ces types de transformateurs sont utilisés dans le transport de l'énergie électrique, dans les TV, dans les fours, etc
- *Les sous-volteurs :* $k \prec 1 \Rightarrow U_2 \prec U_1$. Ces types de transformateurs sont utilisés dans la soudure, dans les postes radio, dans les jouets d'enfants, dans les chargeurs de téléphone.
- *Les stabilisateurs :* $k = 1 \Rightarrow U_2 = U_1$. Ces types de transformateurs sont utilisés pour la stabilisation de la tension (comme transformateur d'isolement).

2) a) Son coefficient de transformation

$$k = \frac{N_2}{N_1}$$

$$k = \frac{2750}{350} = 7{,}89 \quad \Rightarrow \quad k = 7{,}89$$

On a : $k \succ\succ 1$ donc c'est un survolteur

Solution

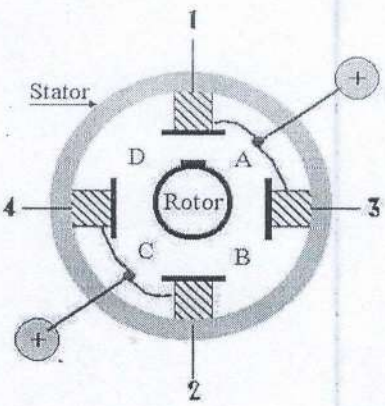
*1) a) **Définition :***

L'alternateur industriel est une source de tension alternative sinusoïdale. Exemples : les dynamos, les turbines.

Description :

L'alternateur industriel comprend 2 parties essentielles : un inducteur tournant appelé rotor et un induit fixe appelé stator.

- *Le rotor est constitué d'un aimant comportant p paires de pôles alternés.*
- *Le stator est formé de plusieurs bobines montées en série.*



b) Principe de fonctionnement :

Il est basé sur l'induction électromagnétique. Lorsqu'on fait tourner le rotor, il y a variation du flux d'induction dans les spires du stator ; cela entraine la naissance d'une f.é.m. induite dans le stator et par conséquent une tension u de valeur efficace U s'établit à ses aux bornes

2) a) fréquence de la tension aux bornes du stator

$f = np$

$$\begin{cases} n = 3000\,tr/\min = \dfrac{3000}{60} = 50\ Hz \\ p = 8 \end{cases}$$

b) Le flux d'induction

$\phi = 2pNSB\cos\theta \ \ avec\ \theta = \omega t + \theta_0$

$à\ t = 0\ ;\ \theta_0 = \theta_{max/} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 0$

$\phi = 2pNSB\cos\omega t \quad (wb)$

c) Expression de la f.é.m. induite

$$e=-\frac{d\phi}{dt}=\omega 2pNSB\sin\omega t \quad avec\ \omega=2\pi np$$

$$e=2\pi np.2pNSB\sin\omega t$$

$$e=4\pi np^2NSB\sin\omega t \quad (V)$$

d) La tension $U_{MN}=u$

$$u=-e \quad \Rightarrow \quad u=-4\pi np^2NSB\sin\omega t$$

$$\begin{cases} U_m=-4\pi np^2NSB \\ U=\dfrac{U_m}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$S=\pi\frac{d^2}{4} \;\Rightarrow\; u=-4\pi np^2N\pi\frac{d^2}{4}B\sin\omega t$$

$$u=-\pi^2np^2Nd^2B\sin\omega t$$

$$\begin{cases} \pi^2=10 \\ n=50\,Hz \\ p=8 \end{cases} ; \quad \begin{cases} N=210^3 \\ d=10^{-1}m \\ B=10^{-2}T \end{cases}$$

$$u=-10\times50\times64\times210^3\times10^{-2}\times10^{-2}\sin\omega t$$

$$u=-6400\sin 800\pi t \quad (V)$$

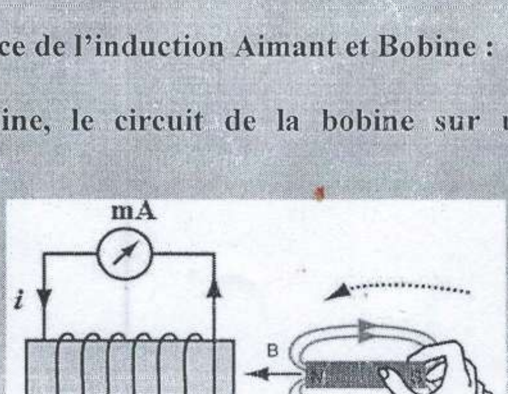
$$\begin{cases} U_m=6400V \\ U=\dfrac{6400}{\sqrt{2}}=4525{,}5\,V \end{cases}$$

2.5. Décrire et interpréter des expériences de mise en évidence de l'induction et de l'auto-induction.

Application 1

Expérience 1 : Mise en évidence de l'induction Aimant et Bobine :

Soit un aimant et une bobine, le circuit de la bobine sur un milliampèremètre (ou un galvanomètre).

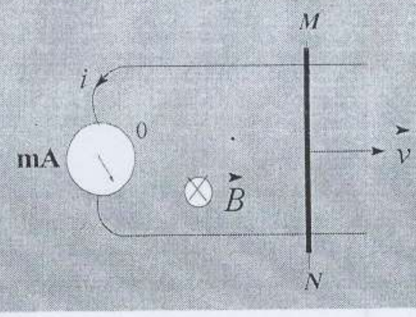


Lorsqu'on fait déplacer l'aimant au voisinage de la bobine ou la bobine au voisinage de l'aimant, l'aiguille du milliampèremètre dévie et revient à 0 lorsqu'on arrête les déplacements.

En effet lors des mouvements relatifs de l'aimant et de la bobine, il y a variation du flux d'induction ; cela entraine la naissance d'une f.é.m. induite et par la suite apparition d'un courant induit dans la bobine entrainant la déviation de l'aiguille du milliampèremètre. ***Le phénomène observé est l'induction électromagnétique : l'aimant est l'inducteur et la bobine est l'induit.***

Expérience 2 : Mise en évidence de l'induction (conducteur sur rails)

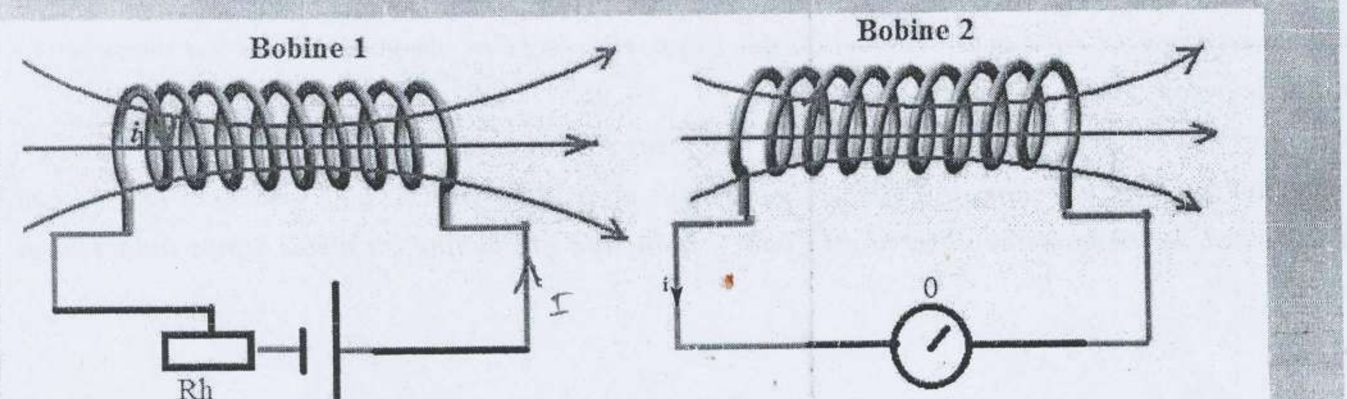
On dispose de 2 rails, d'un conducteur MN, d'un milliampèremètre et d'un aimant.



Lorsqu'on fait déplacer le conducteur, l'aiguille du milliampèremètre dévie et revient à 0 lorsque le conducteur s'arrête.

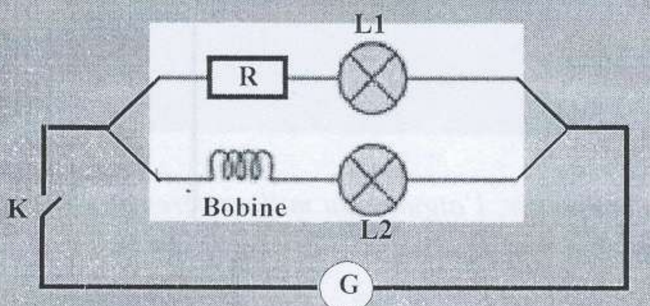
En effet le déplacement du conducteur dans $\vec{B}$ entraine la variation du flux d'induction et par conséquent la naissance d'une f.é.m. induite et l'apparition d'un courant induit dans le circuit. C'est pourquoi l'aiguille du milliampèremètre dévie. ***Le phénomène observé est l'induction électromagnétique : l'aimant est l'inducteur, MN est l'induit.***

Expérience 3 : Induction (Bob – bob)



On dispose de 2 bobines coaxiales placées au voisinage l'une de l'autre. Le circuit de la bobine 1 est fermé sur un générateur et un rhéostat, le circuit de la bobine 2 est fermé sur un milliampèremètre.
A la fermeture et à l'ouverture du circuit de la bobine 1, l'aiguille du milliampèremètre dévie.
On observe le même phénomène (déviation de l'aiguille) lorsqu'on fait varier l'intensité du courant dans le circuit de la bobine 1 à l'aide du rhéostat.
En effet à la fermeture et à l'ouverture du circuit de la bobine 1 il y a variation du flux d'induction dans la bobine 2 ; cela entraine la naissance d'une f.é.m. induite dans cette bobine et par conséquent l'apparition d'un courant induit qui fait dévier l'aiguille du milliampèremètre.
Aussi toute variation du courant dans la bobine 1 entraine une variation du flux dans la bobine 2 et l'apparition d'un courant induit dans cette bobine. ***Le phénomène observé est l'induction électromagnétique : la bobine 1 est l'inducteur et la bobine 2 est l'induit.***

Expérience 4 : Mise en évidence de l'auto – inducteur (expérience des deux lampes)

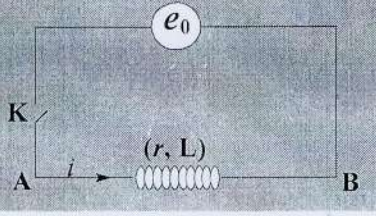


On dispose de 2 lampes identiques L_1L_2, d'un générateur, d'une bobine et d'un conducteur ohmique.
La résistance de la bobine est égale à celle du conducteur ; la lampe L_2 est reliée à la bobine.
A la fermeture du circuit, la lampe L_2, reliée à la bobine s'allume avec un léger retard et à l'ouverture du circuit elle s'éteint avec un léger retard.
En effet à la fermeture du circuit, il y a augmentation du flux propre de la bobine ; cela entraine la naissance d'une f.é.m. d'auto – induction qui s'oppose à la f.é.m. du générateur c'est pourquoi L_2 s'allume avec retard.
A l'ouverture du circuit il y a diminution du flux propre de la bobine, création d'une f.é.m. d'auto – induction qui tend à prolonger l'effet du générateur dans la lampe L_2 ; c'est pourquoi elle s'éteint avec retard. ***Le phénomène observé est l'auto – induction : la bobine est même temps inducteur et induit.***

Application _ 2

Expression du courant à la fermeture et à l'ouverture d'un circuit induit.

Soit une bobine de résistance r et d'inductance L, montée aux bornes d'un générateur de f.é.m. e_0.



Equation différentielle du circuit

Loi Ohm $\Rightarrow \quad U_{AB} = ri - e \quad \Leftrightarrow \quad U_{AB} = ri + L\dfrac{di}{dt}$

- ***A la fermeture du circuit***

$$U_{AB} = e_0 \quad \Leftrightarrow \quad e_0 = ri + L\frac{di}{dt}$$

$$L\frac{di}{dt} = e_0 - ri$$

$$\frac{di}{e_0 - ri} = \frac{1}{L}dt$$

$$\frac{d(e_0 - ri)}{di} = -r$$

$$-\frac{rdi}{e_0 - ri} = -\frac{r}{L}dt$$

$$\frac{d(e_0 - ri)}{di} \times \frac{di}{e_0 - ri} = -\frac{r}{L}dt$$

$$\frac{d(e_0 - ri)}{e_0 - ri} = -\frac{r}{L}dt$$

$$\int_0^i \frac{d(e_0 - ri)}{e_0 - ri} = -\frac{r}{L}\int_0^t dt$$

$$[\ln(e_0 - ri)]_0^i = -\frac{r}{L}t$$

$$\ln(e_0 - ri) - \ln e_0 = -\frac{r}{L}t$$

$$\ln\left(\frac{e_0 - ri}{e_0}\right) = -\frac{r}{L}t$$

$$\frac{e_0 - ri}{e_0} = e^{-\frac{r}{L}t}$$

$$e_0 - ri = e_0 e^{-\frac{r}{L}t}$$

$$ri = e_0 - e_0 e^{-\frac{r}{L}t} = e_0\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$$

$$i = \frac{e_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$$

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{e_0}{r} : en\ regime\ \ permanent \\ \dfrac{L}{r} = \tau : cste\ de\ temps\ en\ S \end{cases}$$

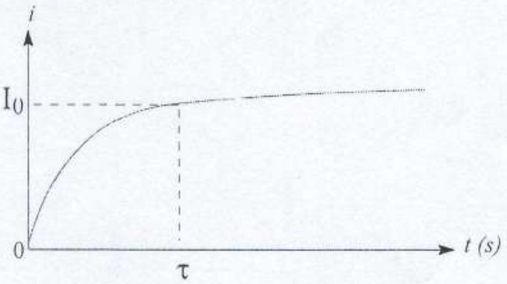
L'expression de i à la fermeture du circuit est :

$$i = I_0\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \quad (A)$$

$$A\,t = 0,\ \ i(0) = I_0\left(1 - e^0\right) = 0$$

$$A\,t = \infty,\ \ i(\infty) = I_0\left(1 - e^{-\infty}\right) = I_0$$

Traçons le graphe de i = f(t).



- *A l'ouverture du circuit*

$$U_{AB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$L\frac{di}{dt} = -ri$$

$$\frac{di}{ri} = -\frac{1}{L}dt$$

$$\frac{d(ri)}{di} = r$$

$$r\frac{di}{ri} = -\frac{r}{L}dt$$

$$\frac{d(ri)}{di} \times \frac{di}{ri} = -\frac{r}{L} dt$$

$$\frac{d(ri)}{ri} = -\frac{r}{L} dt$$

$$\int_{I_0}^{i} \frac{d(ri)}{ri} = -\frac{r}{L} \int_{0}^{t} dt$$

$$\left[\ln(ri)\right]_{I_0}^{i} = -\frac{r}{L} t$$

$$\ln(ri) - \ln rI_0 = -\frac{r}{L} t$$

$$\ln\left(\frac{i}{I_0}\right) = -\frac{r}{L} t$$

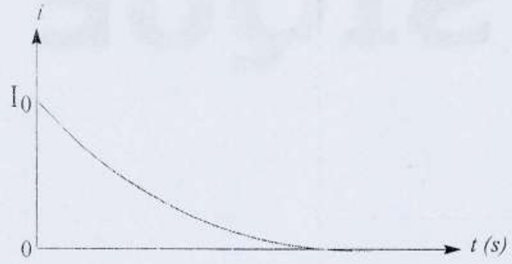
$$\frac{i}{I_0} = e^{-\frac{r}{L}t}$$

$$i = I_0 e^{-\frac{r}{L}t}$$

$$\frac{r}{L} = \frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \quad i = I_0 e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

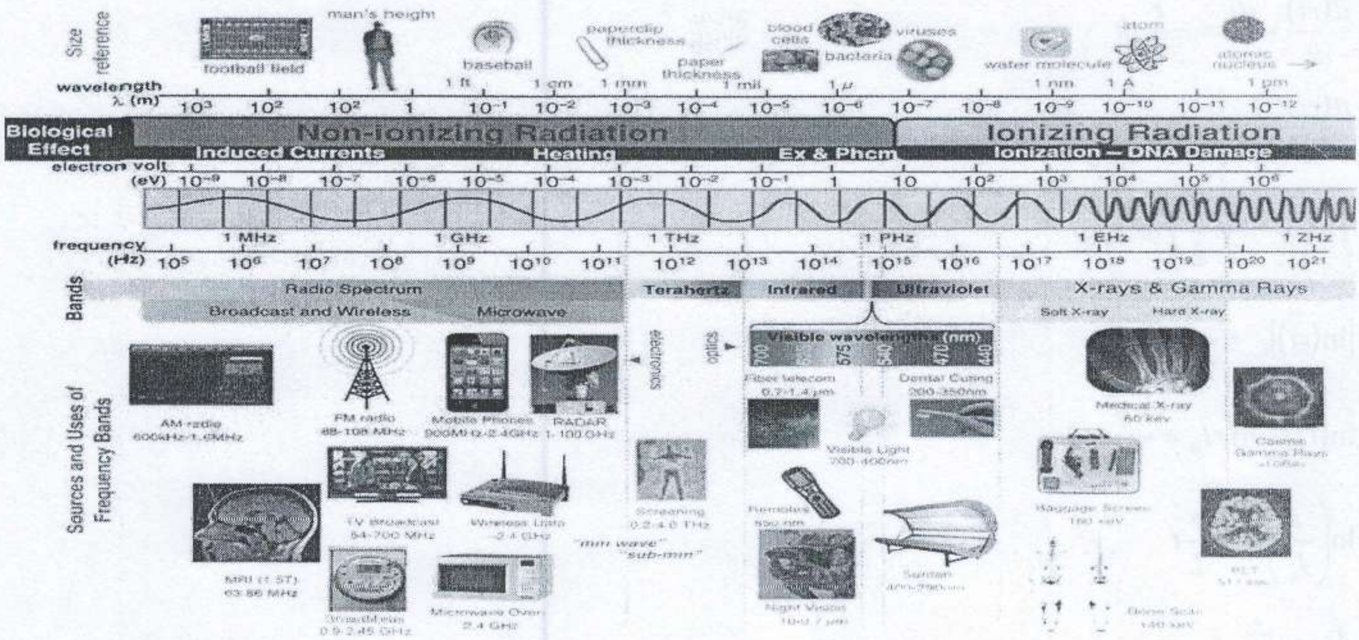
$$At = 0,\ i(0) = I_0 e^0 = I_0$$

$$At = \infty,\ i(0) = I_0 e^{-\infty} = 0$$

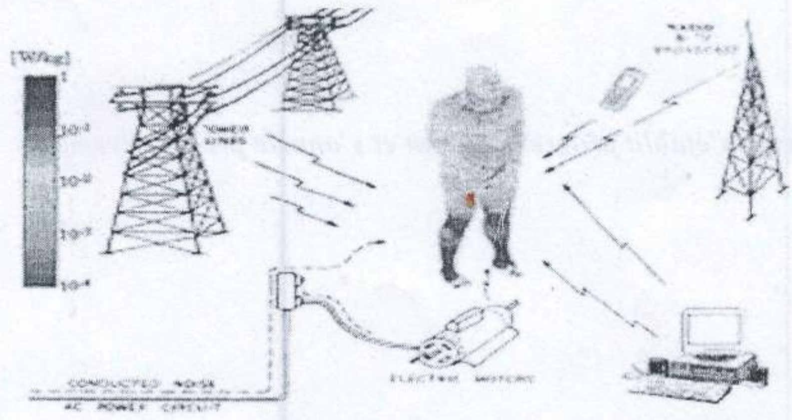


Conclusion :

Dans une bobine le courant s'établit progressivement et s'annule progressivement.



OPTIQUE PHYSIQUE



Situation problème :

Etonné par le téléphone, l'internet, la télévision, les nombreuses radios FM et autres, Mamadou cherche à comprendre le fonctionnement physique des causes de l'épanouissement de la technologie de l'informatique. Il pose plusieurs questions à un ingénieur.

Ce dernier lui parle « d'ondes électromagnétiques, de la lumière, du laser, de fibres optiques, d'interférence lumineuses ».

Mamadou veut bien s'approprier l'optique physique.

Longueurs d'onde en *m*

10^{-14}	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	1 10^{2} 10^{4}	10^{6} 10^{8}
Rayons Gamma	Rayons X	Radiations ultra-violettes		Radiations infra-rouges	Ondes Radar	Ondes Radioélectriques FM TV ondes courtes ondes moyennes grandes ondes	Circuits en courant alternatif	

Spectre visible

VIOLET	BLEU	Bleu vert	VERT	Jaune vert	JAUNE	ORANGE	ROUGE
400		500		600		700	

Longueurs d'onde en *nm*

- Applications des OEM :

Les OEM sont essentiellement utilisées en télécommunication, médecine et industrie.

- **Le photon :** est une particule sans masse et sans charge se propageant dans le vide à la vitesse de la lumière.

Les photons sont des grains de lumière ; ils sont associés aux OEM.

- **Les rayons X :** ce sont des radiations électromagnétiques de longueurs d'onde comprises entre 10^{-12} et 10^{-8}m.

- Propriétés

Les rayons X sont ionisants, luminusants et impressionnent les plaques photographiques. Ils traversent certaines matières et sont absorbés par les os.

- Usages

Les rayons X sont utilisés en médecine (radiographie, écographie), dans la lute contre la fraude douanière et les stupéfiants ainsi que pour la détection des faux billets de la banque.

- **L'ultraviolet (UV) :** est unc radiation invisible dont les longueurs d'ondes sont comprises entre 10^{-8} et $0,410^{-6}$m.

- Propriétés des UV (propriété d'absorption)

C'est une propriété sélective : l'atmosphère (ozone 0_3), l'eau, le verre ordinaire absorbent une partie des UV.

- Usages

L'UV est utilisé :

* En chimie pour l'initiation de certaines réactions en chaîne

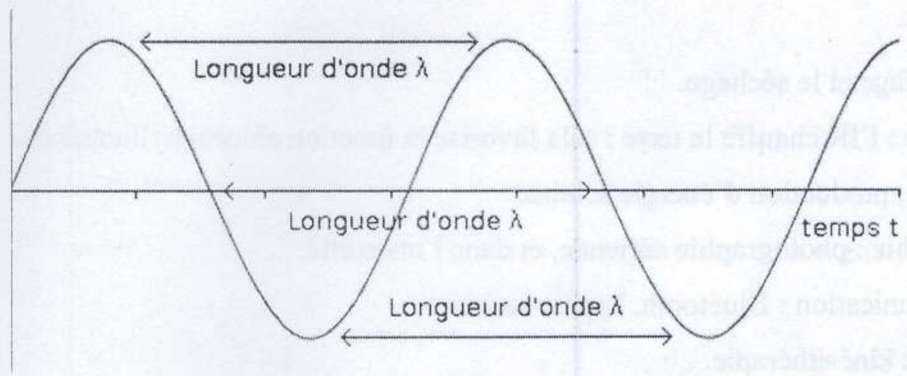
* En médecine : Désinfection des eaux stagnantes, traitement d'ulcère d'estomac, sécrétion de vitamine A nécessaire à la croissance du squelette, bronzage.

1. Ce qu'il faut savoir

1.1. Les définitions

- **Une onde :** est la propagation d'un signal.
- **La Longueur d'onde :** est la période spatiale λ de l'onde :

$$\boxed{\lambda = C\,T} \qquad \begin{cases} C : \text{célérité en m/s} \\ T : \text{période en s} \\ \lambda : \text{en m} \end{cases}$$



- **La lumière :** est une radiation polychromatique visible ; elle est composée des 7 couleurs de l'arc en ciel (allant du rouge au violet).
- **La célérité de la lumière :** est la vitesse de la lumière dans le vide : **$C = 3.\ 10^8$ m/s**
- **Une radiation mono chromatique :** est une radiation à longueur d'onde unique.

Exemple : le rouge ($\lambda_r = 0{,}8\ \mu m$) ; le violet ($\lambda_v = 0{,}4\ \mu m$)

- **Une onde électromagnétique :** est la propagation simultanée de deux signaux électriques et magnétiques **(perpendiculaires)** dans le vide à la célérité de la lumière.

- Propriétés générales des ondes électromagnétiques :

Les propriétés des ondes électromagnétiques (OEM) sont celles de la lumière :

* Les OEM se propagent à vitesse constante dans un milieu **transparent, homogène et isotrope.**

* Les OEM obéissent aux lois générales de l'optique : **la réflexion, la réfraction, la polarisation, la diffusion et les interférences** se manifestent chez les OEM.

- Classement des OEM :

Elles sont classées en fonction de leurs longueurs d'onde en rayons γ, rayon X, ultraviolet, lumière visible, infrarouge et ondes hertziennes.

- **Le spectre visible :** est l'ensemble des radiations visibles. Son domaine est $0{,}4 10^{-6}\,m \leq \lambda \leq 0{,}8 10^{-6}\,m$

- **L'infrarouge (IR) :** c'est une radiation invisible dont les longueurs d'ondes sont comprises entre $0{,}8 10^{-6}$ et $10^{-3}\,m$.

- Propriétés absorption :

C'est une propriété sélective : l'atmosphère, l'eau, le verre ordinaire absorbe une partie des IR.

- Usages :

L'IR est utilisé :

* pour le chauffage et le séchage.
* En agronomie : l'IR chauffe la terre ; cela favorise la fonction chlorophyllienne des plantes.
* En électricité : production d'énergie solaire.
* En photographie : photographie aérienne, et dans l'obscurité.
* En télécommunication : Bluetooth, hyper – envoi.
* En médecine : kinésithérapie.

Cependant l'IR peut provoquer certaines ophtalmies.

- **Les ondes Hertziennes :** ce sont les OEM de longueurs d'onde supérieur à 1 mm.

Les ondes Hertziennes sont essentiellement utilisées en télécommunication.

- Classement et usages des ondes Hertziennes

Les ondes Hertziennes sont classées et utilisées en fonction de leur longueur d'onde. On distingue :

* Les ondes très courtes : $\lambda \prec 10\,m$; utilisées en radio diffusion FM, télévision, les radars, vidéos surveillance.
* Les ondes courtes (SW) : $10 \leq \lambda \prec 100\,m$ utilisées en radio diffusion et en radio téléphonie.
* Les ondes moyennes : $100 \leq \lambda \prec 800\,m$ utilisées en radio diffusion.
* Les ondes longues : $\lambda \leq 800\,m$ utilisées en télécom inter continental.

1.2. Définitions relatives à l'interférence lumineuse

- **Source cohérente :** Est une source émettant des radiations cohérentes (unidirectionnelles à fréquence et amplitude constante).

- **Deux sources cohérentes :** sont deux sources synchrones émettant des radiations à amplitudes et différence de phase constantes.

- **Le laser**

- Définition :

Est une source cohérente de lumière.

- Rayonnement laser :

Est une radiation monochromatique unidirectionnelle à amplitude constante.

- Propriétés du laser :

Un rayonnement laser est cohérent : il est unidirectionnel, monochromatique, son amplitude est constante.

Ses propriétés optiques sont celles des OEM

- Applications du laser :

Le laser est utilisé en :

* Médecine : chirurgie, scanner
* Télécom, astronomie, sécurité.
* Multimédia, holographie (image 3D).

- **Le dispositif des fentes de Young :** est un dispositif qui permet la mise en évidence des interférences lumineuses.
- **L'interférence lumineuse :** est la superposition de deux radiations cohérentes de lumière en un point.

- Conditions:

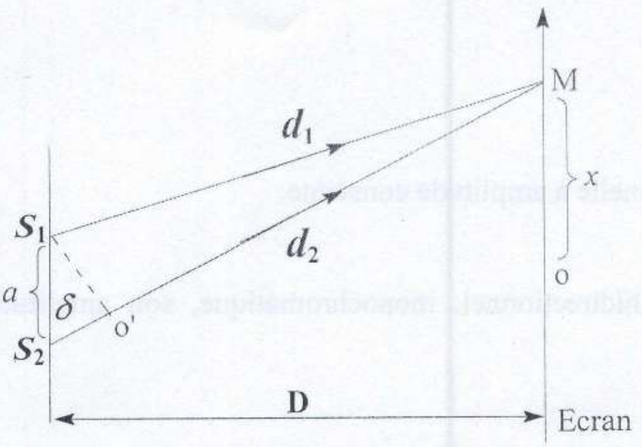
Il y a observation de franges d'interférence en un point si en ce point il y a superposition de deux radiations cohérentes (synchrones à amplitude et différence de phase constantes).

- Applications

Les interférences lumineuses sont utilisées :

* Pour déterminer la longueur d'onde d'une radiation
* En holographie

- **Franges d'interférences :** ce sont les lignes parallèles alternativement brillantes et sombres observées sur l'écran dans le champ d'interférence.
- **Champ d'interférence :** est la zone dans la quelle on observe les franges d'interférences
- **La différence de marche :** est la différence δ entre les distances d_1 et d_2 respectivement des sources S_1 et S_2 au point d'interférence sur l'écran.



$$\boxed{\delta = d_2 - d_1 = \frac{a\,x}{D}}\ (m)$$

$$\begin{cases} a = \textit{distance entre } S_1 \textit{ et } S_2 \\ D = \textit{distance des sources à l'écran} \end{cases}$$

- **L'interfrange :** est la distance entre deux franges consécutives de même nature

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}\ (m)$$

- **Etat vibratoire d'un point :** La position (abscisse) d'un point dans le champ d'interférence est : $\delta = \frac{a\,x}{D} \Rightarrow x = \frac{\delta\,D}{a}$

- Franges brillantes (ou lumineuses) :

Un point M appartient à une frange brillante si et seulement si : $\delta = d_2 - d_1 = k\lambda$ *avec* $k \in Z$.

Conséquence :

$$\begin{cases} \delta = k\lambda \\ \delta = \frac{ax}{D} \end{cases} \Rightarrow x = k\frac{\lambda D}{a} \quad ou \quad x = k\,i \Rightarrow i = \frac{x}{k}$$

- Franges obscures (ou sombres) :

Un point M appartient à une frange obscure si et seulement si :

$$\delta = d_2 - d_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a} \quad ou \ x = \left(k + \frac{1}{2}\right)i$$

- **Ordre d'interférence :** c'est le quotient P de la différence de marche par la longueur d'onde $P = \frac{\delta}{\lambda}$ ou $P = \frac{x}{i}$

* Pour une frange brillante : $P = \frac{k\lambda}{\lambda} \Rightarrow P = k\ avec\ k \in Z$

$k = 0 \Rightarrow P = 0$: Première frange lumineuse (frange centrale)

$k_2 = 5 \Rightarrow P = 5$: Sixième frange brillante

* Pour une frange obscure : $P = \dfrac{(k+0,5)\lambda}{\lambda} \Rightarrow P = k + 0,5$

$k = 0 \Rightarrow P = 0,5$

$k = 1 \Rightarrow P = 1 + \dfrac{1}{2} = 1,5$

Conséquence :

Expression de i :

$$\begin{cases} k=1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\lambda D}{a} \\ k=2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{2\lambda D}{a} \end{cases} \Rightarrow i = x_2 - x_1 = \frac{2\lambda D}{a} - \frac{\lambda D}{a} \quad d'où \ \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

2. Ce qu'il faut savoir faire

2.1. Décrire et interpréter une expérience permettant de mettre en évidence le phénomène d'interférence lumineuse :

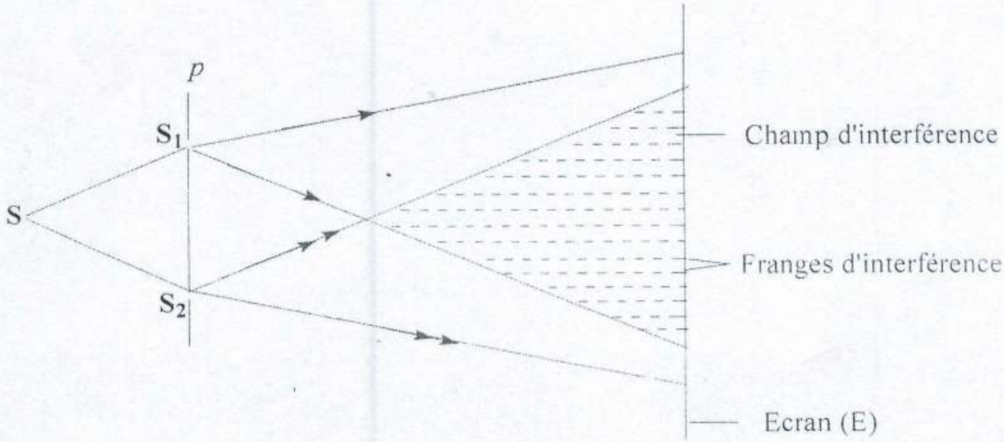
Application _ 1

Expérience des fentes de Young

Décris et interprète l'expérience des fentes de Young.

L'expérience des fentes de Young : ***le phénomène d'interférence lumineuse.***

- ***Description du dispositif :*** *Le dispositif est constitué d'une source cohérente de radiation monochromatique (**S**) (Laser), d'un plan opaque **p** percé de deux fentes S_1 et S_2 constituants deux sources secondaires cohérentes et un écran **E**.*



- ***Observation :*** *Lorsque le laser éclaire les fentes S_1 et S_2, on observe sur l'écran des lignes parallèles alternativement brillantes et sombres.*
- ***Interprétation*** *: S_1 et S_2 éclairés se comportent comme deux sources cohérentes. Les radiations issues de ces sources se superposent sur l'écran dans une zone dans laquelle on observe des lignes brillantes et obscures. Ces lignes sont appelées franges d'interférences.* ***Le phénomène observé est l'interférence lumineuse. Il permet de mettre en évidence la nature ondulatoire de la lumière.***

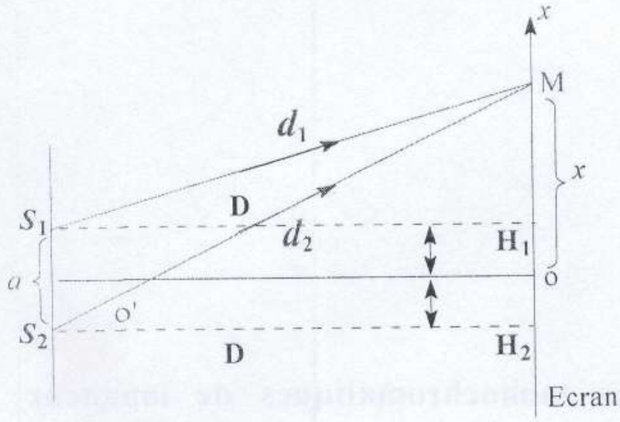
2.2 Etablir l'expérience de la différence de marche (δ) :

Application _ 2

Etablis de deux façons l'expression de la différence de marche des radiations issues de S1 et S2 du dispositif de Young.

Etablissons l'expression de la différence de marche en un point M du champ d'interférence.

Méthode 1 : Théorème de Pythagore



Dans le triangle S_1H_1M

$$d_1^2 = D^2 + (H_1M)^2$$

$$H_1M = x - \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$

Dans le triangle S_2MH_2

$$d_2^2 = D^2 + (H_2M)^2$$

$$H_2M = x + \frac{a}{2} \Rightarrow d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$d_2^2 - d_1^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - D^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

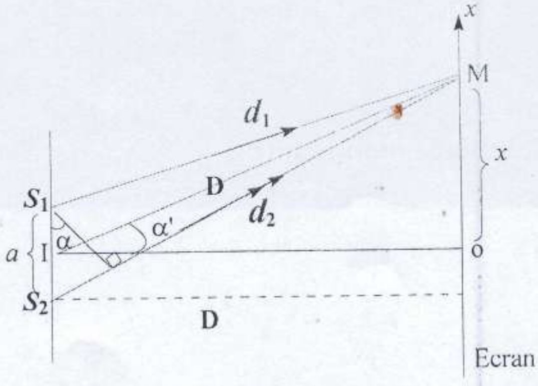
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}\right) = 2ax$$

$$(d_2 - d_1)(d_2 - d_1) = 2ax$$

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = \delta \\ d_2 + d_1 = 2D \end{cases} \Rightarrow 2D\delta = 2ax \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{ax}{D}} \quad (m)$$

Méthode 2 : Similitude des triangles



$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\delta}{a} \\ \tan\alpha' = \dfrac{x}{D} \approx \sin\alpha' \ \ (car\ \alpha'\ faible) \end{cases}$$

or $\alpha \approx \alpha'$ *(angle à côtés* $\perp$*)*

donc $\sin\alpha \approx \sin\alpha'$

$$\frac{\delta}{a} = \frac{x}{D} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{a\,x}{D}$$

2.3 Décris l'interférence lumineuse :

a. Lorsque la source émet deux radiations monochromatiques de longueur d'ondes différentes λ_1 et λ_2.

b. Lorsque la source émet de la lumière blanche.

Application _ 3

Interférence lumineuse en radiation poly chromatique.

Que se passe t-il dans le champ d'interférence lorsque la source principale émet :

a. Deux radiations monochromatiques de longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 différentes.

AN : $\begin{cases} \lambda_1 = 0{,}5\ \mu m \\ \lambda_2 = 0{,}675\ \mu m \\ i_1 = 2\, mm \end{cases}$

Calcule i_2. Compare les interfranges.

Trouve la distance l entre la frange centrale et la 1ère frange lumineuse (coïncidence des deux radiations lumineuses)

b. La source émet de la lumière blanche :

AN : $\begin{cases} a = 4\, mm \\ x(M) = 1\, mm \\ D = 150\, cm \end{cases}$

Trouve les longueurs d'ondes des radiations manquantes.

Solution

a. ***La source émet deux radiations monochromatiques de longueurs d'ondes λ_1 et λ_2***

Dans ce cas, chaque radiation forme son propre système de franges.

Ainsi sur l'écran on observe une frange centrale brillante résultant de la superposition des deux couleurs entourées de zone floue puis sombre ensuite brillante ainsi de suite.

* ***Valeur i_2***

$\boxed{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \dfrac{i_2}{i_1}}$!

$$i_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} i_1 = \frac{0,675}{0,5} \times 2 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 2,7\, mm$$

La distance l de la 1ère coïncidence des franges brillantes

Avec $i_2 \succ i_1$; $l = n i_2$

A la coïncidence on a : $n i_2 = (n+1) i_1$

$n i_2 = n i_1 + i_1$

$$n(i_2 - i_1) = i_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{i_1}{i_2 - i_1}$$

$$n = \frac{2}{2,7-2} = 2,85 \quad \Rightarrow l = 3 \times 2,7 \quad \Rightarrow \quad l = 8,1\ mm$$

b. ***La source émet de la lumière blanche***

Dans ce cas chacune des 7 radiations constituant la lumière blanche forme son propre système de franges.

Ainsi sur l'écran on observe une frange centrale très blanche entourée de zone irisée (colorée) puis d'une zone de « blanc sale » appelé blanc d'ordre supérieur.

La décomposition du blanc d'ordre supérieur à la l'aide d'un prisme (spectroscope) montre l'existence de lignes noires appelés cannelures. Ces cannelures correspondent aux radiations manquantes.

AN : Longueurs d'onde λ des radiations manquantes

Ces radiations en M sont telles que $x = (k+0,5)\dfrac{\lambda D}{a}$

$$\lambda = \frac{a\,x}{(k+0,5)D}$$

$$\lambda = \frac{410^{-3} \times 10^{-3}}{(k+0,5)\times 1,5} \Rightarrow \lambda = \frac{410^{-6}}{1,5} \times \frac{1}{k+0,5} \Rightarrow \lambda = \frac{2,6610^{-6}}{k+0,5}$$

Radiations visibles $\Rightarrow 0,410^{-6} \le \lambda \le 0,810^{-6}$

$$0,410^{-6} \le \frac{2,6610^{-6}}{k+0,5} \le 0,810^{-6}$$

$$0,4 \le \frac{2,66}{k+0,5} \le 0,8$$

$$\frac{1}{0,8} \le \frac{k+0,5}{2,66} \le \frac{1}{0,4}$$

$$\frac{2,66}{0,8} - 0,5 \le k \le \frac{2,66}{0,4} - 0,5$$

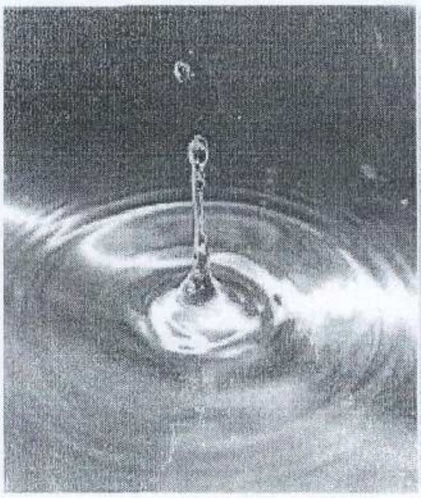
$$2,82 \le k \le 6,15 \quad . \Rightarrow \quad k \in \{3, 4, 5, 6\}$$

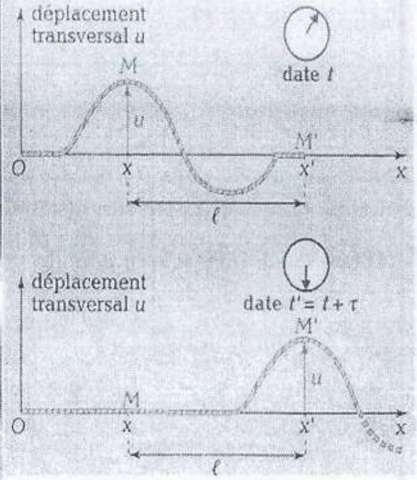
Pour $k = 3 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2,60}{3,5} 10^{-6} \Rightarrow \lambda_1 = 0,76\ \mu m$

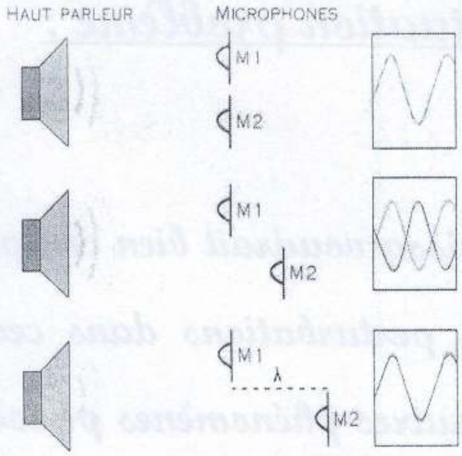
Pour $k = 4 \Rightarrow \lambda_2 = 0,59\ \mu m$

Pour $k = 5 \Rightarrow \lambda_3 = 0,48\ \mu m$

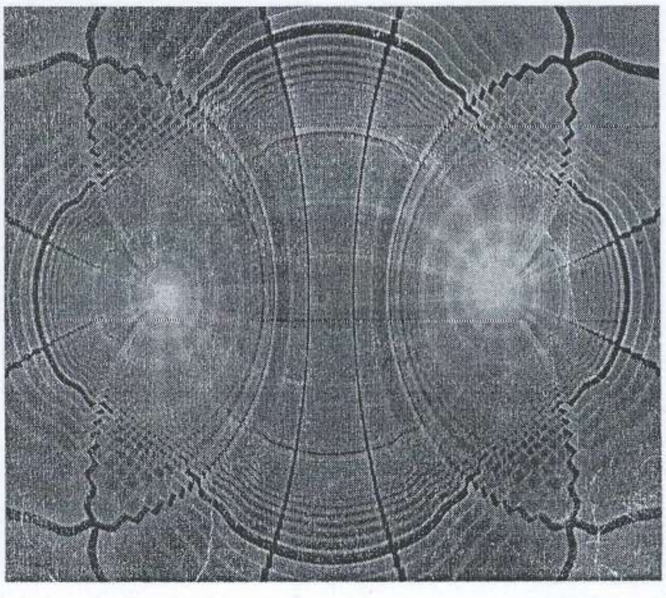
Pour $k = 6 \Rightarrow \lambda_4 = 0,40\ \mu m$

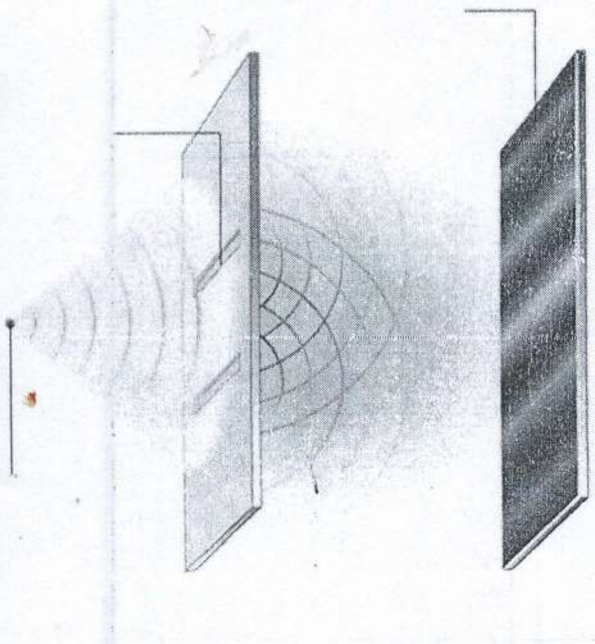






ONDES PROGRESSIVES





Situation problème :

Drissa voudrait bien comprendre comment se forment et se propagent les perturbations dans certains milieux : corde, eau, ressort et bien d'autres phénomènes périodiques.

Il se rappelle qu'il y a 3 ans son frère de terminale Sciences lui parlait d'interférence mécanique de son et d'hyperboloïdes.

Il décide alors de s'approprier toutes ces notions.

1. Ce qu'il faut savoir

Les définitions générales

- **Un phénomène périodique :** est un phénomène qui se répète identique à lui-même.
- **Une onde progressive :** est la propagation progressive d'un signal dans un milieu matériel.
- **Un signal :** est la perturbation locale d'un milieu.
  - Types d'ondes progressives : ce sont les ondes mécaniques, les ondes sonores.
  - Une onde peut – être longitudinale ou transversale.
- **Onde transversale :** est une onde dont la déformation est perpendiculaire à la direction de propagation.

Exemple : onde le long d'une corde tendue, rides sur la surface de l'eau.

- **Onde longitudinale :** est une onde dont la déformation est parallèle à la direction de propagation.

Exemple : onde le long d'un ressort.

- **La période d'une onde :** est le temps au bout duquel l'onde se répète identique à elle-même.

$$T = \frac{2\pi}{w} \text{ (s)}$$

- **La célérité d'une onde dans un milieu** : est la vitesse de propagation de cette onde dans ce milieu.

Exemple :

* La célérité d'une onde le long d'une corde est : $C = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ (m/s) avec $\begin{cases} F = Tension\ du\ fil\ en\ N \\ \mu = masse\ linéique \\ \mu = \frac{m}{\ell}\ en\ kg/m \end{cases}$

* La célérité du son dans un gaz : $C = \sqrt{\gamma \frac{P_0 T}{a_0 d T_0}}$

$$\begin{cases} \gamma = coefficient\ qui\ depend\ du\ gaz \\ P_0 = 10^5\, Pa = 1\, atm \\ a_0 = 2{,}293\, kg/m^3 \end{cases} ; \begin{cases} d = densité : d = \frac{M}{29} \\ T_0 = 273°K \\ T = (t+273)°K \end{cases}$$

Pour les gaz diatomiques $\gamma = 1{,}4$

NB : La célérité du son dans un gaz dépend de T et d

- Influence de T : avec d = constante

$$\begin{cases} \grave{a}\ T_1, C_1 = \sqrt{\gamma \dfrac{P_0 T_1}{a_0 d T_0}} \\ \grave{a}\ T_2, C_2 = \sqrt{\gamma \dfrac{P_0 T_2}{a_0 d T_0}} \end{cases} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

- Influence de d : avec T = constante

$$\begin{cases} C_1 = \sqrt{\gamma \dfrac{P_0 T}{a_0 d_1 T_0}} \\ C_2 = \sqrt{\gamma \dfrac{P_0 T}{a_0 d_2 T_0}} \end{cases} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$$

- **La longueur d'onde :** est la période spatiale d'une onde : $\lambda = CT\,(m)$; $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{C}{f}$

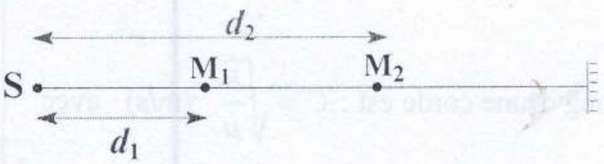
C'est la distance parcourue par l'onde pendant une période.

- **Une source :** est le point de départ de l'onde.

Exemple : Dans le cas des ondes le long d'une corde, la source est le point S d'attache de la corde au vibreur. Dans le cas des ondes sur l'eau la source est le point de contact du perturbateur avec la surface de l'eau.

NB : Les propriétés d'une onde sont **: la réflexion, la réfraction, la diffusion, les interférences.**

- **La phase d'un point :** la phase d'un point M_1 par rapport à la source.



$$\varphi_1 = -\frac{2\pi d_1}{\lambda} \quad (rd)$$

Celle d'un point M2 par rapport S

$$\varphi_2 = -\frac{2\pi d_2}{\lambda} \quad (rd)$$

- **Le déphasage** : est la différence de phase ϕ entre ces deux points.

Exemple : $\varphi_{M_1/M_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$

NB : Le déphasage permet de déterminer l'avance ou le retard d'un point par rapport à l'autre.

Conséquences :

* Si $\varphi \succ 0 : M_1$ est en avance sur M_2

* Si $\varphi \prec 0$: M_1 est en retard sur M_2.

* Pour $\varphi = 0 : M_1 \; et \; M_2$ sont en phase.

* Pour $\varphi = \pi \, rd : M_1 \; et \; M_2$ sont en opposition de phase.

* Pour $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} rd : M_1 \; et \; M_2$ sont en quadrature de phase.

- **Points en phases – Points en opposition de phases**

* <u>M_1 et M_2 sont en phases :</u> si seulement si : $\varphi = 2k\pi$

$$\varphi = -\frac{2\pi d_1}{\lambda} + \frac{2\pi d_2}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)$$

$$\varphi = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad d_2 - d_1 = k\lambda \quad avec \; k \in Z$$

Dans ce cas les deux points ont même mouvement :

- Si $y(M_1) = \pm a \;\; \Rightarrow \;\; y(M_2) = \pm a$
- Si $y(M_1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; y(M_2) = 0$

* <u>M_1 et M_2 sont en opposition de phases</u>

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = \pi + 2k\pi$$

$$\frac{2}{\lambda}(d_2 - d_1) = 1 + 2k$$

$$2(d_2 - d_1) = \lambda(2k+1)$$

$$\boxed{d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}}$$

Lorsque deux points M_1 et M_2 sont en opposition de phase

- Si $y(M_1) = a \;\; \Rightarrow \;\; y(M_2) = -a$
- Si $y(M_1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; y(M_2) = 0$ (dans le sens contraire).

- **Point en quadrature de phase :** dans ce cas $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{2}{\lambda}(d_2 - d_1) = \frac{1}{2} + 2k$$

$$2(d_2 - d_1) = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\lambda$$

$$d_2 - d_1 = \left(k + \frac{1}{4}\right)\lambda$$

$$Si\, y(M_1) = \pm a \quad , \quad y(M_2) = 0$$

Conclusion

* Deux points M_1 et M_2 sont en phases s'ils sont distants d'un nombre entier de longueur d'onde.

* Deux points M_1 et M_2 sont en opposition de phases lorsqu'ils sont distants d'un nombre impair de demi-longueur d'onde.

- **Interférence mécanique**

  - Définition :

L'interférence mécanique est la superposition de deux ondes cohérentes.

  - Condition d'interférence :

Il y a interférence en un point lorsqu'en ce point se superposent deux ondes cohérentes (même longueurs d'ondes, ϕ constante).

- **Points mobiles :** ce sont les points ou les ondes arrivent en phase. Dans ce cas : $d_2 - d_1 = k\lambda$.

Ces points sont situés sur des hyperboloïde de foyers S_1 et S_2.

- **Points immobiles :** ce sont les points tels que les ondes arrivent en opposition de phase.

Dans ce cas $d_2 - d_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$

2. Ce qu'il faut savoir faire

2.1. Déterminer les équations horaires des points

Application _1

Détermination des équations horaires des points

L'extrémité S d'une lame vibrante de fréquence 100 Hz est reliée à une corde de longueur ℓ = 1m. La lame est animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude 5cm.
A l'instant initial l'élongation du vibreur est maximale.
La corde est tendue sous une force T = 10N ; la masse de la corde est 11g ; un système permet d'éviter toute réflexion des ondes.

1. **Calcules la célérité puis la longueur d'ondes des vibrations**
2. **Etablis l'équation horaire $x = f(t)$ du vibreur**
3. **Le mouvement sinusoïdal se propage le long de la corde.**

a) **Trouves les équations des mouvements des points suivants : A(d_1) ; B(d_2) ; C(d_3) ; D(d_4)**
$d_1 = 7{,}5$ cm ; $d_2 = 60$ cm ; $d_3 = 75$ cm ; $d_4 = 90$ cm.

b) **Compares les mouvements des points A, B, C, D à celui de S**

c) **Quels sont les points en phases, en opposition de phase, en quadrature de phase.**

d) **Trouves les positions de chacun des points lorsque l'élongation de la source est $x_S = 0$; $x_S = a$ et $x_S = -a$.**

d_1 ; ……. ; d_4 sont les distances entre la source et les points ; a est l'amplitude du mouvement du vibreur.

1. Calculons

- ***La célérité :*** $C = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ (m/s)

$$AN : \begin{cases} T = 10\,N \\ \mu = \dfrac{m}{\ell} = \dfrac{1110^{-3}}{1} = 1110^{-3}\,kg/m \end{cases} \Rightarrow C = \sqrt{\dfrac{10}{1110^{-3}}} \Rightarrow C = 30\ m/s$$

- ***La longueur d'onde***

$$\lambda - \frac{C}{f}$$

$$\begin{cases} C = 30\, m/s \\ f = 100\, Hz \end{cases} \Rightarrow \lambda = 30\ cm$$

2. Equation horaire de la source

$$x = a\cos(wt + \varphi)$$

$$\begin{cases} \grave{a}\ t = 0 \Rightarrow x_0 = a\cos\varphi \\ \grave{a}\ t = 0 \Rightarrow x_0 = a \end{cases} \Leftrightarrow a\cos\varphi = a$$

$$\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

$$Donc \begin{cases} a = 5cm \\ w = 2\pi f = 200\pi\ rd/s \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5\cos 200\pi t \quad (cm)$$

3. a) Les équations des mouvements des points

$$x(A) = a\cos\left(wt - \frac{2\pi d}{\lambda}\right)$$

*** En A situé à d_1**

$$x(A) = a\cos\left(wt - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right)$$

$$= 5\cos\left(200\pi t - \frac{2\pi \times 7{,}5}{30}\right) = 5\cos(200\pi t - 0{,}5\pi)$$

$$x(A) = 5\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (cm) \Rightarrow \varphi_A = -\frac{\pi}{2}\ (rd)$$

*** En B situé à d_2**

$$x(B) = a\cos\left(wt - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right)$$

$$= 5\cos\left(200\pi t - \frac{2\pi \times 60}{30}\right)$$

$$x(B) = 5\cos(200\pi t - 4\pi) \Rightarrow x_B = 5\cos 200\pi t \quad (cm)$$

$$\varphi_B = 0$$

*** En C situé à d_3**

$$x(C) = a\cos\left(wt - \frac{2\pi d_3}{\lambda}\right)$$

$$= 5\cos\left(200\pi t - \frac{2\pi \times 75}{30}\right)$$

$= 5\cos(200\pi t - 5\pi)$ (cm) $\Rightarrow$ $\varphi_3 = -\pi$ (rd)

* *En D situé à d_4*

$x(D) = a\cos\left(wt - \dfrac{2\pi d_4}{\lambda}\right)$

$= 5\cos(200\pi t - 6\pi)$

$x(D) = 5\cos 200\pi t$ (cm)

$\varphi_4 = 0$

b. Comparaison des mouvements à celui de S.

* $\varphi_A = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ *A est en quadrature de phase avec S*

* $\varphi_B = 0 \Rightarrow$ *B est en phase avec S*

* $\varphi_C = -\pi \Rightarrow$ *C est en opposition de phase avec S*

* $\varphi_A = 0 \Rightarrow$ *D est en phase avec S*

c. Comparaison des mouvements à celui de S.

* $\varphi_{A/B} = \varphi_A - \varphi_B = -\dfrac{\pi}{2} - 0 = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ *. A et B en quadrature de phase.*

* $\varphi_{A/C} = \varphi_A - \varphi_C = -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ *A et C en quadrature de phase*

* $\varphi_{A/D} = \varphi_A - \varphi_D = -\dfrac{\pi}{2} - 0 = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ *A et D sont en quadrature de phase*

* $\varphi_{B/C} = \varphi_B - \varphi_C = 0 + \pi = \pi \Rightarrow$ *B et C sont en opposition de phase.*

* $\varphi_{B/D} = \varphi_B - \varphi_D = 0 - 0 = 0 \Rightarrow$ *B et D sont en phase.*

* $\varphi_{C/D} = \varphi_C - \varphi_D = -\pi - 0 = -\pi \Rightarrow$ *C et D sont en opposition de phase*

d. Position de chacun des points

$x(S)$	$-a$	0	a
$x(A)$	0	$\pm a$	0
$x(B)$	$-a$	0	a
$x(C)$	a	0	$-a$
$x(D)$	$-a$	0	a

Application _2

Equation horaire ; Equation en fonction de x ; Représentation graphique ; Aspect d'une courbe

L'extrémité O d'une corde est reliée à une lame vibrante de f = 100Hz d'amplitude a = 4mm. La corde de longueur ℓ = 1m est tendue sous une force $\vec{F}$ de valeur 20N. La célérité des ondes le long de la corde est 20 m/s

1. **Trouves la masse de corde.**
2. **La réflexion des ondes est empêchées, à l'instant initial la vitesse du vibreur est maxi. En déduis l'équation horaire de la source O.**
3. **a) Trouves les positions de tous les points de la corde vibrante en phase avec O.**

b) Quel est le nombre de points vibrant en opposition de phase avec le point O ?

4. **a) Trouves l'équation du mouvement du point M situé à 50 cm de la source. Compares son mouvement à celui de O.**

b) Représentes graphiquement l'équation du mouvement de M en fonction du temps.

5. **A un instant t quelconque la corde présente un état vibratoire, l'état de vibration de chaque point dépend de la position de ce point par rapport à la source O.**

a) Ecris l'équation $y(x)$ du mouvement de la corde à $t = 210^{-2}$s.

b) Représente graphiquement l'aspect de la corde à cette date.

Solution

1. ***Trouvons la masse de la corde***

$$C = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\frac{m}{\ell}}} \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{\frac{F\ell}{m}}$$

$$C^2 = \frac{F\ell}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F\ell}{C^2}$$

$$AN\begin{cases} F = 20N \\ \ell = 1m \\ C = 20m/s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{\frac{20\times 1}{(20)^2}} = 0{,}005 = 510^{-2}\,kg$$

2. ***L'équation de la source O***

$x = a\cos(wt + \varphi)$

$à\ t - 0 \ \Rightarrow \ x_0 - a\cos\varphi$

$v = -wa\sin(wt+\varphi)$

$à\ t = 0\ ,\quad \begin{cases} x_0 = a\cos\varphi & (1) \\ v_0 = -wa\sin\varphi & (2) \end{cases}$

$à\ t = 0\ ,\quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = V_m \end{cases}$

$(2) \Rightarrow V_m = -V_m \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} rd$

D'où l'équation de la source est : $x = 4\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (cm)

3. a) Les positions des points vibrants en phase avec 0

Ces points sont tels que : $\begin{cases} d = k\lambda \\ d \le 100\,cm \end{cases} \Rightarrow 0 \prec k\lambda \le 100$

$\lambda = \frac{C}{f} = \frac{20}{100} = 0{,}2\,m \Rightarrow \lambda = 20\,cm$

$0 \prec 20k \le 100$

$0 \prec k \le 5 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *Il y a 5 points vibrantes en phase avec la source.*

Pour $k = 1 \Rightarrow d_1 = 20\,cm$

Pour $k = 2 \Rightarrow d_2 = 40\,cm$

Pour $k = 3 \Rightarrow d_3 = 60\,cm$

Pour $k = 4 \Rightarrow d_4 = 80\,cm$

Pour $k = 5 \Rightarrow d_5 = 100\,cm$

b) Le nombre des points vibrants en opposition de phase avec O.

Ces points sont tels que : $\begin{cases} d = (k'+0{,}5)\lambda \\ d \le 100\,cm \end{cases} \Rightarrow 0 \prec (k'+0{,}5)\lambda \le 100$

$\frac{0}{\lambda} \prec k'+0{,}5 \le 5$

$-0{,}5 \prec k' \le 4{,}5 \Rightarrow k' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Pour $k' = 0 \Rightarrow d_0' = 10\,cm$

Pour $k' = 1 \Rightarrow d_1' = 30\,cm$

Pour $k' = 2 \Rightarrow d_2' = 50\,cm$

Pour $k' = 3 \quad \Rightarrow \quad d_3' = 70\,cm$

Pour $k' = 4 \quad \Rightarrow \quad d_4' = 90\,cm$

4. a) Trouves l'équation du mouvement du point M

$$x = a\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right)$$

$$= 4\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \times 50}{20}\right)$$

$$= 4\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2} - \pi\right)$$

$$x_M = 4\cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (cm)$$

Comparons : $\varphi = \varphi_0 - \varphi_M = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \; rd$

Donc M est en opposition de phase avec la source O

b) Représentation graphique

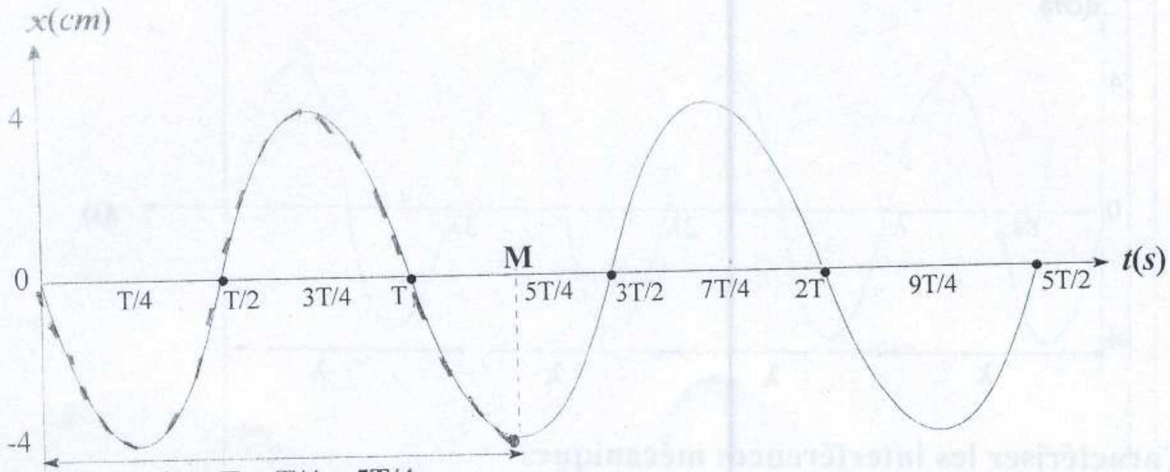
$$x_M = 4\cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_M = 4\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T	$\frac{5T}{4}$	$\frac{3T}{2}$	$\frac{7T}{4}$	$2T$	$\frac{9T}{4}$	$\frac{5T}{2}$
x	0	-4	0	4	0	-4	0	4	0	-4	0

$$\theta_1 = \frac{d_1}{C} = \frac{0{,}5}{20} = 2{,}5.10^{-2}\,m$$

$$t = 2T = 2.10^{-2}\,s \quad \Rightarrow \quad \frac{2{,}5.10^{-2}}{2.10^{-2}} = 1{,}25\,T$$



$\theta_1 = T + T/4 = 5T/4$

avec $\theta_1 = \dfrac{d_1}{C}$

5. *a) Ecrivons l'équation y(x)*

$$y = a\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$\begin{cases} t = 2.10^{-2}\,s \\ T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{100} = 10^{-2}\,s \end{cases} \Rightarrow \quad t = 2T$$

$$y = 4\cos\left(\frac{2\pi}{T} \times 2T - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= 4\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= 4\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

x	0	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{3\lambda}{4}$	λ	$\frac{5\lambda}{4}$
y	0	-4	0	4	0	-4

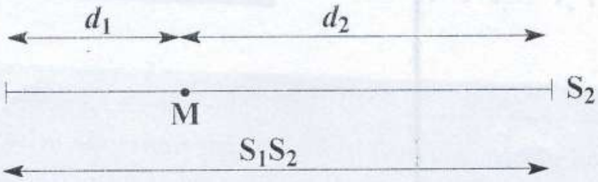
Interprétation

Lorsque le vibreur fait vibrer la fourche, les pointes se comportent comme deux sources cohérentes entrainant la création d'ondes progressives sur la surface de l'eau : rides mobiles et immobiles. Les rides mobiles correspondent à l'arrivée en phase de 2 ondes et les rides immobiles à l'arrivée en opposition de phase de deux ondes.

2. *Points M (points mobiles, points immobiles)*

- ***Points mobiles :*** *ce sont les points situés sur les franges mobiles. En ces points l'amplitude est maximale.*

Leurs nombres et positions



$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k\lambda \\ d_2 + d_1 = S_1S_2 \end{cases}$$

$$2d_2 = S_1S_2 + k\lambda \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{S_1S_2}{2} + \frac{k\lambda}{2} \quad \textit{position de } M / S_2$$

$$Or\ 0 \prec d_2 \prec S_1S_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-S_1S_2}{\lambda} \prec k \prec \frac{S_1S_2}{\lambda}$$

- ***Les points immobiles :*** *ce sont les points d'amplitude nulle. Ils sont situés sur les franges immobiles intercalées entre les franges mobiles.*

Position et nombre : Avec $d_2 > d_1$.

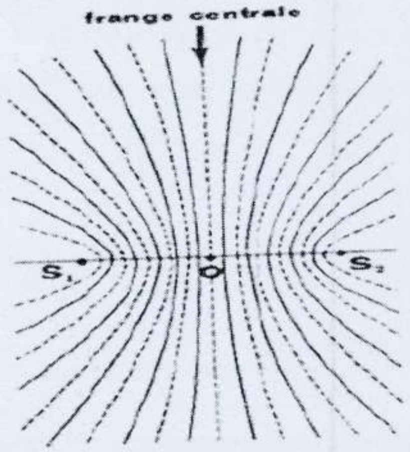
$$\begin{cases} d_2 - d_1 = (k + 0,5)\lambda \\ d_2 + d_1 = S_1S_2 \end{cases}$$

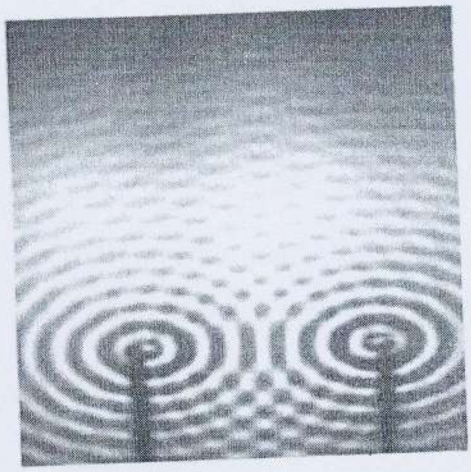
$$2d_2 = S_1S_2 + (k + 0,5)\lambda \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{S_1S_2}{2} + (k + 0,5)\frac{\lambda}{2} \quad \textit{position } / S_2$$

Le nombre :

$$\frac{-S_1S_2}{\lambda} - \frac{1}{2} \prec k \prec \frac{S_1S_2}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

3. *L'aspect de la surface de l'eau*





Application _3

Description et interprétation d'une expérience de mise en évidence des interférences mécaniques sur la surface de l'eau contenu dans une cuve

Une lame vibrante est munie d'une fourche dont les 2 pointes S_1S_2 plongent légèrement da l'eau contenue dans une cuve. La distance S_1S_2 est 3,3cm. Les points S_1 et S_2 sont animés d' mouvement sinusoïdal de fréquence $f = 25$ Hz. Les déformations verticales de la surface de l'e se font sur un segment de 8cm et à l'instant initial l'abscisse est maximale. La célérité des on est de 20cm/S.

1. a) Trouves l'amplitude et la longueur d'onde des ondes.

b) S_1 et S_2 sont- ils en phase ? Justifie.

c) S_1 et S_2 ont – ils même équation horaire ? Si oui établie là.

2. Décris l'aspect de la surface de l'eau.

3. On considère un point M situé à $d_1 = 4$cm de S_1 et à $d_2 = 3$cm.

a) Détermine l'équation horaire y (M) = $f(t)$

*** De façon analytique.**

*** Par la construction de Fresnel.**

b) En déduis l'élongation de M à t = 2,5s

4. Détermine, sur le segment S_1S_2 (entre S_1 et S_2) :

a) Le nombre et la position des points mobiles

b) Le nombres et la position des points immobiles (ou repos)

Solution

1. a) ***L'amplitude et la longueur d'onde***

* *L'amplitude :* Les déformations s'effectuant sur un segment de 8cm alors :

$$a = \frac{8}{2} = 4cm \Rightarrow a = 4cm$$

* *La Longueur d'onde λ*

$$\lambda = \frac{C}{f}$$

$$AN : \begin{cases} C = 20\,cm/s = 0{,}2\,m/s \\ f = 25\,Hz \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{0{,}2}{25} = 8.10^{-3}\,m \Rightarrow \lambda = 0{,}8\,cm$$

b. ***S_1 et S_2 sont en phase car ces points constituent 2 sources cohérentes.***

c. ***S_1 et S_2 ont même équation horaire.***

L'équation horaire de S_1 et S_2.

$$y = y_1 = y_2 = a\cos(\omega t + \varphi)$$

A $t = 0$, $y_0 = a$

$$\Rightarrow a = a\cos\varphi \Rightarrow \varphi = 0\ rd$$

$$y = 4\cos(50\pi t) \quad (cm)$$

2. ***Aspect de la surface de l'eau***

On observe sur la surface de l'eau des rides sous forme d'arcs d'hyperboles centre en S_1 et S_2 se sont des franges d'interférences. Ces franges d'interférences résultent de la superposition des ondes cohérentes issues des deux sources S_1 et S_2.

3. ***Recherche des équations $y_1(t)$ et $y_2(t)$.***

$$y_M = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} y_1 = a\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi\, d_1}{\lambda}\right) \\ y_2 = a\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi\, d_2}{\lambda}\right) \end{cases}$$

$$y_1 = 4\cos(50\pi t - 10) \Rightarrow y_1 = 4\cos 50\pi t \quad (cm)$$

$$y_2 = 4\cos\left(50\pi t - \frac{6\pi}{0{,}8}\right) \Rightarrow y_2 = 4\cos(50\pi t - 7{,}5\pi) \Rightarrow y_2 = 4\cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (cm)$$

Equation du point M

a. De façon analytique

$$y_M = y_1 + y_2$$

$$= 4\cos 50\pi t + 4\cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

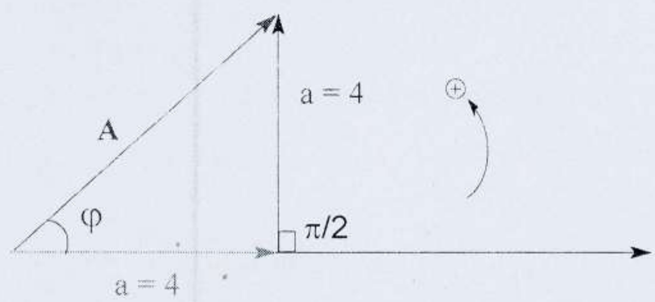
$$= 8\cos\left(\frac{50\pi t - 50\pi - \frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{100\pi t + \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$= 8\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 4\sqrt{2}\cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \ (cm)$$

b) Par construction de Fresnel

$$y_M = y_1 + y_2$$

$$y_1 \mapsto \vec{v}_1\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix} \quad ; \quad y_2 \mapsto \vec{v}_2\begin{vmatrix}\pi/2\\4\end{vmatrix} \quad ; \quad y \mapsto \vec{v}\begin{vmatrix}\varphi\\A\end{vmatrix} \quad \text{tels que : } \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$



$$A^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{2}a \quad \Rightarrow \quad A = 4\sqrt{2} \quad (cm)$$

$$\tan\varphi = \frac{a}{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}\ rd$$

$$y = 4\sqrt{2}\cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \ (cm)$$

c. L'élongation de M à t = 2,5s

$$y = 4\sqrt{2}\cos\left(50\pi \times 2{,}5 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -4 \quad (cm)$$

4. *a)* ***Le nombre et la position des franges mobiles***

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = k\lambda \\ x_2 + x_1 = S_1S_2 \end{cases}$$

$$2x_2 = S_1S_2 + k\lambda \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{S_1S_2}{2} + \frac{k\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 2{,}65 + 0{,}4\,k$$

$$-6{,}62 \prec k \prec 6{,}62 \quad \Rightarrow k \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il 13 points mobiles.

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x(cm)	0,25	0,65	1,05	1,45	1,85	2,25	2,65	3,05	3,45	3,85	4,25	4,65	5,05

b) ***Points immobiles***

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \\ x_2 + x_1 = S_1S_2 \end{cases}$$

$$2x_2 = S_1S_2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{S_1S_2}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

$$x_2 = 2{,}65 + 0{,}4\,k + 0{,}2$$

$$0 \prec 2{,}65 + 0{,}4k + 0{,}8 \prec S_1S_2$$

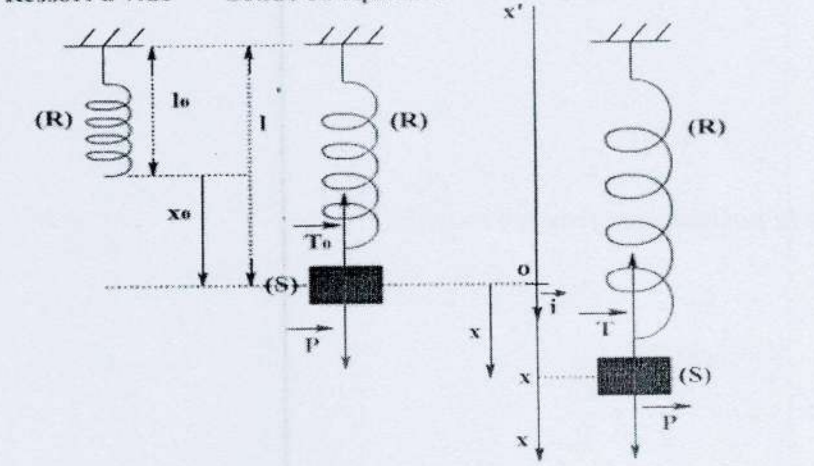
$$-2{,}65 \prec 0{,}4k + 0{,}2 \prec 5{,}3 - 2{,}65$$

$$-2{,}65 \prec 0{,}4k + 0{,}2 \prec 2{,}65$$

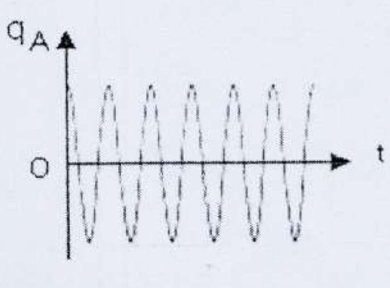
$$-2{,}85 \prec 0{,}4k \prec 6{,}125$$

$$k \in \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x(cm)	0,05	0,45	0,85	1,25	1,65	2,05	2,45	2,85	3,25	3,65	4,05	4,45	4,85	5,25



OSCILLATIONS LIBRES

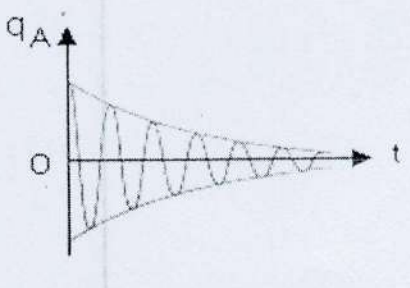


Résistance nulle

Régime périodique

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

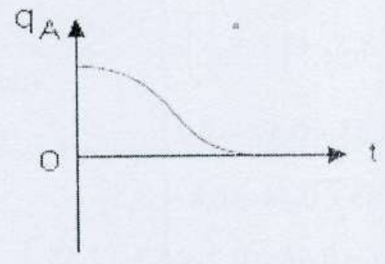
(paragraphe 2)



Résistance faible

Régime pseudo-périodique

T_1 voisin de T_0



Résistance importante

Régime apériodique

En présence de résistance R, l'énergie électromagnétique est dissipée en chaleur. Les oscillations électriques diminuent d'amplitude ou même disparaissent.

Situation problème :

Au cours d'une séance de TP dans l'atelier de construction d'automobile, Issa découvre que différentes parties d'un véhicule font l'objet de mouvements de va et vient périodiques.

Il pose alors plusieurs questions à son professeur de physique.

Il veut bien comprendre ce que c'est : un oscillateur, un pendule, un circuit LC.

L'élève voudrait bien apprendre à traduire mathématiquement les mouvements de ces oscillateurs.

1. Ce qu'il faut savoir

1.1. Les Définitions générales

- **Un oscillateur :** est un système dont la grandeur caractéristique varie de façon alternati périodique.

Exemple :

* Le cœur, le tympan de l'oreille, l'œil sont des oscillateurs biologiques

* Une balle parfaitement élastique sur un sol parfaitement élastique est un oscillateur mécanique.

- **Un oscillateur libre :** est un oscillateur qui oscille avec sa fréquence propre.

- **Un oscillateur forcé :** est un oscillateur qui oscille avec une fréquence qui lui est imposée.

- **Un oscillateur mécanique :** est un système qui effectue des vas et vient autour d'une po d'équilibre.

- **Un oscillateur mécanique libre :** est un système qui, une fois écarté de sa position et abando effectue des oscillations tout seul.

- **Un oscillateur mécanique harmonique :** est un oscillateur mécanique dont l'abscisse es fonction sinusoïdale du temps ; son amplitude et son énergie mécanique restent constantes.

$x = x_m \cos(w_0 t + \varphi)$

$v = \dot{x} = -w_0 x_m \sin(w_0 t + \varphi)$

$a = \ddot{x} = -w_0^2 x_m \cos(w_0 t + \varphi)$

$\ddot{x} = -w_0^2 x \quad \Rightarrow$

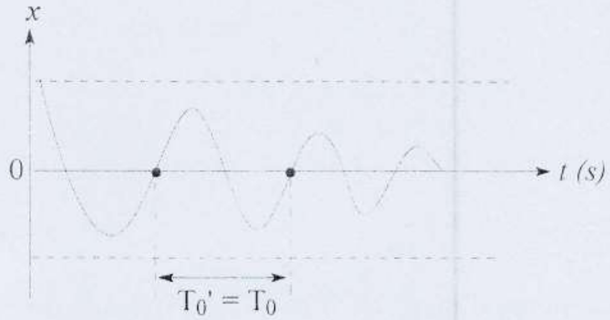
$\boxed{\ddot{x} + w_0^2 x = 0}$ ***Equation différentielle type d'un oscillateur mécanique harmonique***

- **Un oscillateur mécanique linéaire :** est un oscillateur mécanique dont l'accélération est une linéaire de l'abscisse.

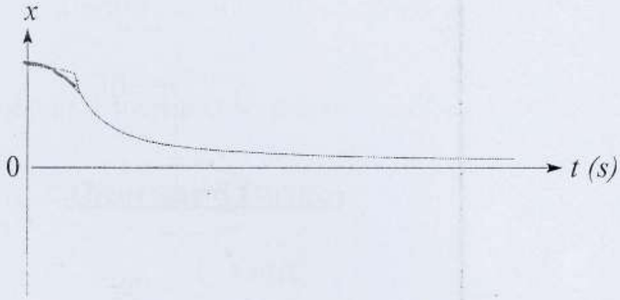
$$\ddot{x} = Ax$$

- **Un oscillateur mécanique amorti :** est oscillateur mécanique soumis à des forces de frottem Dans ce cas il y a perte d'énergie (E_m diminue).

* Lorsque les frottements sont faibles, le régime est pseudopériodique ; la pseudo période est éga la vraie période.



* Lorsque les frottements sont importants le régime est apériodique.



- **Une oscillation mécanique :** est un va et vient complet autour de la position d'équilibre.
- **La période d'un oscillateur mécanique :** est la durée d'un oscillateur complet.

Conséquences

* Lorsqu'un oscillateur effectue n oscillations en t secondes, sa période est $T_0 = \frac{t}{n}$ (s)

* Lorsqu'un pendule bat la seconde, sa période est $T_0 = 2s$

- **Un oscillateur électrique libre :** est un oscillateur électrique qui oscille avec sa fréquence propre : la fréquence du courant = à la fréquence propre du circuit.
- **Un oscillateur électrique linéaire :** est un oscillateur électrique dont la dérivée seconde de la charge est une fonction de la charge : $\ddot{u} = Au$ ou $\ddot{q} = Aq$
- **Un oscillateur électrique amorti :** est un oscillateur électrique dans lequel il y a perte d'énergie par effet Joule.

Dans un tel oscillateur une résistance électrique r joue le rôle d'amortisseur.

1.2. Exemples d'oscillateurs libres

- **Le pendule élastique**

* Définition :

Le pendule élastique est un système constitué d'un ressort parfait à l'extrémité libre duquel est fixé un solide de masse m. C'est un oscillateur mécanique libre de translation.

* Caractéristiques :

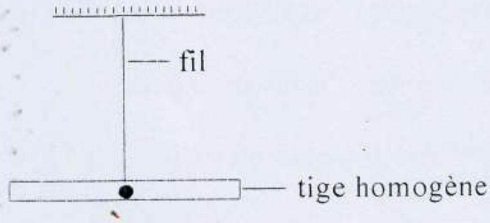
Le pendule élastique est caractérisé par la raideur k du ressort en N/m et la masse m du solide.

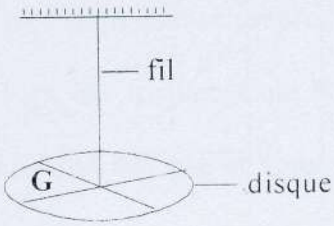
NB : $\begin{cases} en\ parallèle : K = k_1 + k_2 \\ en\ série : K = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \end{cases}$

- **Le pendule de torsion**

* Définition :

Le pendule de torsion est un système d'un fil de torsion à l'extrémité libre du quel est fixée une tige (ou un disque) homogène. C'est un oscillateur mécanique libre de rotation.



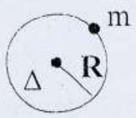


* Caractéristiques :

Le pendule de torsion est caractérisé par la constante de torsion **C** du fil et le moment d'inertie **J** de la tige et du disque (**C** en N.m/rd et **J** : Km.m^2).

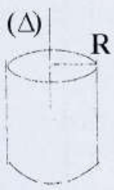
NB : Moment d'inertie.

- **D'un solide par rapport à D :**



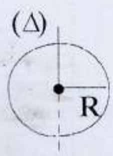
$$\boxed{J_{(\Delta)} = m R^2}$$

- **D'un disque ou cylindre :**



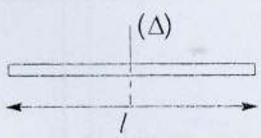
$$\boxed{J_{(\Delta)} = \frac{1}{2} m R^2}$$

- **D'une sphère :**

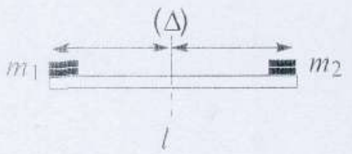


$$\boxed{J_{(\Delta)} = \frac{2}{5} m R^2}$$

- **D'une tige :**



$$\boxed{J_{(\Delta)} = \frac{1}{12} m l^2}$$



$$J_{(\Delta)} = J_0 + J_1 + J_2 = \frac{1}{12} m l^2 + m_1 d_1^2 + m d_2^2$$

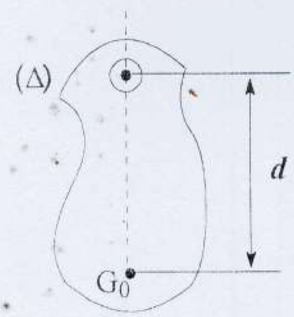
- **Le pendule pesant ou composé**

* Définition :

Est un solide capable de trouver sous l'action de son poids d'un axe qui se ne passe pas par son centre de gravité. C'est un oscillateur mécanique libre de rotation.

* Caractéristiques :

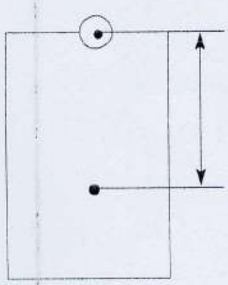
Il est caractérisé par son moment d'inertie et sa masse.



Théoreme d'Huygens

$$J_{(\Delta)} = J_0 + m d^2$$

J_0 : mouvement d'inertie par rapport à l'axe passant par G_0



$$J_{(\Delta)} = J_0 + m d^2$$

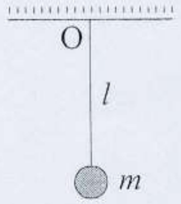
- **Pendule simple**

* Définition :

Est un système constitué d'un fil inextensible à l'extrémité libre duquel est fixé un solide ponctuel de masse m. C'est un oscillateur mécanique libre de rotation.

* Caractéristiques :

Il est caractérisé par la longueur l du fil et la masse m du solide.



$\boxed{J_0 = ml^2}$

* L'isochronisme :

- L'isochronisme est le fait que la période d'un pendule simple soit indépendante de la masse **m** et de l'amplitude maximale α_m.
- Le pendule simple synchrone d'un pendule composé est le pendule ayant la même période que ce pendule pesant.

La longueur du pendule simple synchrone : $l = \dfrac{J}{md}$

* La loi de l'isochronisme des pendules simples :

La période d'un pendule simple effectuant des oscillations de faibles amplitudes ne depend ni de l'amplitude, ni de la masse, elle depend de l et g.

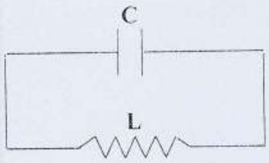
- **Le circuit oscillant**

* Définition :

Est un circuit constitué d'un condensateur de capacité **C** monté en série avec une bobine d'inductance **L**. C'est un oscillateur électrique libre.

* Caractéristiques :

Le circuit oscillant est caractérisé par la capacité **C** du condensateur et l'inductance **L** de la bobine (C en Farad et L est en Henry).



En parallèle : $\begin{cases} C = C_1 + C_2 \\ L = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \end{cases}$

En série : $\begin{cases} C = \dfrac{C_1 C}{C_1 + C_2} \\ L = L_1 + L_2 \end{cases}$

NB : La capacité d'un condensateur plan

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{e}}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 8{,}8510^{-11} \textit{ permitivité du vide absolue} \\ \varepsilon_r = \textit{permitivité relative de l'isolant} \\ S = \textit{Surface des armatures en } m^2 \\ e = \textit{epaisseur de l'isolant en } m \\ C \textit{ en Farad } (F) \end{cases}$$

1.3. Tableau récapitulatif des oscillateurs libres

Oscillateurs	Equations différentielles	Pulsations (rd/s)	Périodes (s)	Fréquences (Hz)	Equations Horaires	Energies		
Pendule Elastique (horizontal)	$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$	$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$N_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	$x=x_m\cos(w_0t+\varphi)$ $v=-w_0x_m\sin(w_0t+\varphi)$	**Potentielle élastique** $E_p=\frac{1}{2}kx^2$	**Cinétique** $E_C=\frac{1}{2}mv^2$	**Mécanique** $E_m=\frac{1}{2}kx_m^2$
Pendule de Torsion	$\ddot{\alpha}+\frac{C}{J}\alpha=0$	$w_0=\sqrt{\frac{C}{J}}$	$T_0=2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$	$N_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J}}$	$\alpha=\alpha_m\cos(w_0t+\varphi)$ $\dot{\alpha}=-w_0x_m\sin(w_0t+\varphi)$	**Potentielle de torsion** $E_p=\frac{1}{2}C\alpha^2$	**Cinétique** $E_C=\frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2$	**Mécanique** $E_m=\frac{1}{2}C\alpha_m^2$
Pendule Pesant	$\ddot{\theta}+\frac{mg\,d}{J}\theta=0$	$w_0=\sqrt{\frac{mg\,d}{J}}$	$T_0=2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\,d}}$	$N_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\,d}{J}}$	$\theta=\theta_m\cos(w_0t+\varphi)$ $\dot{\theta}=-w_0\theta_m\sin(w_0t+\varphi)$	**Potentielle de pesanteur** $E_p=\frac{1}{2}mgd\alpha^2$	**Cinétique** $E_C=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$	**Mécanique** $E_m=\frac{1}{2}J\theta_m^2$
Pendule Simple	$\ddot{\alpha}+\frac{g}{\ell}\alpha=0$	$w_0=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$	$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$	$N_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$	$\alpha=\alpha_m\cos(w_0t+\varphi)$ $\dot{\alpha}=-w_0x_m\sin(w_0t+\varphi)$	**Potentielle de pesanteur** $E_p=\frac{1}{2}mg\ell\alpha^2$	**Cinétique** $E_C=\frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2$	**Mécanique** $E_m=\frac{1}{2}mg\ell\alpha_m^2$
Circuit LC	$\ddot{q}+\frac{1}{LC}q=0$	$w_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$T_0=2\pi\sqrt{LC}$	$N_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$q=q_m\cos(w_0t+\varphi)$ $\dot{q}=-w_0q_m\sin(w_0t+\varphi)$	**Electrostatique** $E_p=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	**Magnétique** $E_C=\frac{1}{2}Li^2$	**Totale** $E_t=\frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}$

2. Ce qu'il faut savoir faire

2.1. Déterminer le pendule élastique

Application _ 1

Etude des oscillations d'un pendule élastique horizontal.

On considère un pendule élastique horizontal. Lorsqu'on écarte le système de sa position d'équilibre d'une distance $d = x_0 = 5cm$ et on l'abandonne sans vitesse à $t = 0$, il oscille librement ; la durée de 10 oscillation est 5s.

On ajoute à la masse m du solide une surcharge m'=10g, lorsqu'on écarte cet ensemble de sa position d'équilibre et on l'abandonne la durée de 10 oscillations devient 3,245s.

1. Etablis l'équation différentielle d'un pendule élastique oscillant horizontalement :

a) En appliquant le théorème du centre d'inertie

b) En appliquant la conservation de l'énergie mécanique

2. En déduis :

a) La nature du mouvement

b) Les expressions de la pulsation, période et fréquence propre.

3. a) Donnes l'expression de période propre :

* du pendule élastique sans surcharge.

* du pendule élastique avec surcharge.

b) En déduis les valeurs de k et m.

4. De l'équation différentielle du système non chargé :

a) Etablis les équations horaires $x = f(t)$ et $v = g(t)$.

b) Traces dans un même repère les variations de $x(t)$ et $v(t)$. Trouves la valeur maximale de v.

c) Exprime à chaque instant les énergies potentielles élastiques et cinétiques de translation du système. En déduire l'expression et la valeur de l'énergie mécanique. Que peut-on dire de l'énergie mécanique au cours du temps. Justifie.

d) Traces dans un même repère les variations des énergies en fonction du temps.

e) Pourquoi dit – on que le pendule élastique oscille dans un puits de potentiel parabolique ? Traces les paraboles représentant E_p et E_c.

En déduis sous quelle forme se trouve l'énergie mécanique pour : $x = \pm x_m$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}x_m$

En réalité le pendule élastique est soumis à des forces de frottement tel que :

$\vec{f} = -\alpha\vec{V}(\alpha \succ 0)$

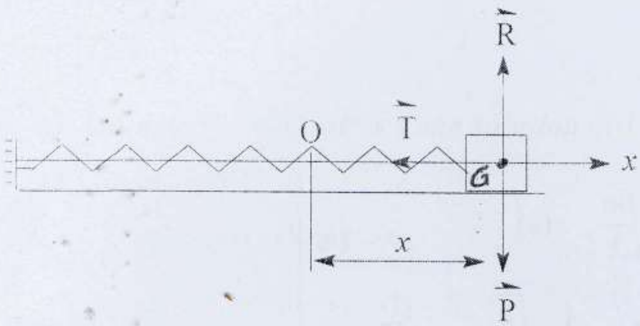
a) Etablis l'équation différentielle élastique amorti.

b) Dans le cas de faible frottement, donne la nature du mouvement, la valeur de la pseudo-période, l'énergie dissipée et l'allure de la courbe $x = f(t)$.

Solution

1. ***Equation différentielle d'un élastique horizontal***

a) ***En appliquant de la RFD***



RFD :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

Suivant $o\vec{x}$

$-T = ma$

$\begin{cases} T = kx \\ a = \ddot{x} \end{cases} \Rightarrow -kx = mx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ *Equation différentielle*

b) ***En appliquant la conservation de l'énergie :***

Le pendule élastique est un système conservatif alors $E_m = E_P + E_C = Cste$

$\Rightarrow \dot{E}_m = \dot{E}_P + \dot{E}_C = 0$

$\begin{cases} E_p = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \dot{E}_p = k\dot{x}x \\ E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow \dot{E}_C = m\ddot{x}\dot{x} \end{cases}$

$\dot{E}_m - 0 \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = 0$

$\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$

$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$

$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ ***Equation différentielle.***

2. Déduction

a) La nature du mouvement : *l'équation différentielle* $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ *est de la forme* $\ddot{x} + w_0^2 x = 0$ *alors le mouvement est sinusoïdal de pulsation* w_0.

b) Les expression de w_0, T_0 ***et*** f_0 ***:***

$$\begin{cases} \ddot{x} + w_0^2 x = 0 \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad w_0^2 = \frac{k}{m}$$

- *La pulsation propre est :* $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (rd/s)$
- *La période propre est :* $T_0 = \frac{2\pi}{w_0} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (s)$
- *La fréquence des périodes est :* $f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (s)$

3) a) Expressions des périodes

$$\begin{cases} \textit{sans surchages } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ \textit{avec surchage } T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k}} \end{cases}$$

$$\left(\frac{T_0}{T_0'}\right)^2 = \frac{m+m'}{k} \times \frac{k}{m}$$

$$\frac{m+m'}{k} = \left(\frac{T_0'}{T_0}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad m+m' = m\left(\frac{T_0'}{T}\right)^2$$

$$m' = m\left(\frac{T_0'}{T}\right)^2 - m$$

$$m' = m\left[\left(\frac{T_0'}{T}\right)^2 - 1\right] \quad \Rightarrow \quad m = \frac{m'}{\left(\frac{T_0'}{T}\right)^2 - 1}$$

$$AN: m' = 100g$$

$$T_0' = \frac{5{,}245}{10}\ (s) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{10}{\left(\frac{5{,}245}{5}\right)^2 - 1} = 100g$$

$$m = 100g$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad T_0^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$$

$$AN: \begin{cases} 4\pi^2 = 40 \\ m = 0{,}1\,Kg \\ T_0 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\,s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{40 \times 0{,}1}{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad k = 16\,N.m^{-1}$$

4. *a) Les équations horaires : une solution de l'équation différentielle est :*

$$x = x_m \cos(w_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x} = v = -w_0 x_m \sin(w_0 t + \varphi)$$

$$\grave{a}\ t = 0 \begin{cases} x_0 = x_m \cos\varphi & (1) \\ v_0 = -w x_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$$

$$\grave{a}\ t = 0 \begin{cases} x_0 = d \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_0 = x_m$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad x_m = x_m \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0$$

$$\begin{cases} x_m = 5\,cm = 5\,10^{-2}\,m \\ w_0 = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi\ (rd/s) \end{cases}$$

$$x = 5\,10^{-2} \cos 4\pi t \quad (m)$$

$$v = -0{,}628 \sin 4\pi t \quad (m/s)$$

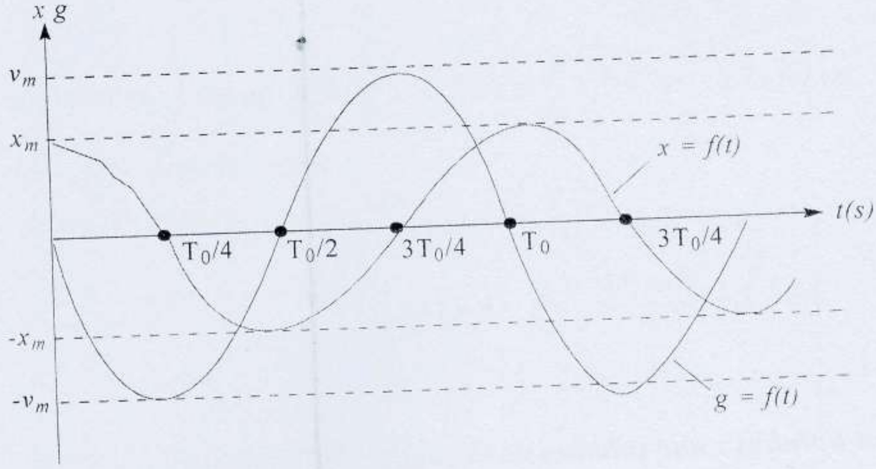
NB : $v_m = w_0 x_m$

b) Les graphes de x = f(t) et v = g(t)

$$x = x_m \cos\frac{2\pi}{T_0} t$$

$$v = v_m \sin\frac{2\pi}{T_0} t$$

t(s)	0	$T_0/4$	$T_0/2$	$3T_0/4$	T_0	$5T_0/4$
x	x_m	0	$-x_m$	0	x_m	0
v	0	$-v_m$	0	v_m	0	$-v_m$



Valeur de v_m est 0,628 m/s.

c) **Les énergies**

- ***Energie potentielle élastique***

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = x_m \cos w_0 t$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2 w_0 t \quad (J)$$

- ***Energie cinétique***

$$E_C = \frac{1}{2}mx^2$$

$$v = -w_0 x_m \sin w_0 t$$

$$E_C = \frac{1}{2}mw_0^2 x_m^2 \sin^2 w_0 t$$

$$w_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}x_m^2 \sin^2 w_0 t$$

$$E_C = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2 w_0 t \quad (J)$$

- ***Energie mécanique***

$$E_m = E_P - E_C = \frac{1}{2}kx_m^2(\cos^2 w_0 t + \sin^2 w_0 t)$$

$$E_m = E_P - E_C = \frac{1}{2}kx_m^2$$

E_m est constante car il y a transformation mutuelle entre E_P et E_C.

AN :

$E_m = \frac{1}{2} \times 16 \times 2510^{-4}$

$E_m = 210^{-2}\ J$

$E_p = 210^{-2} \cos^2 4\pi t \quad (J)$

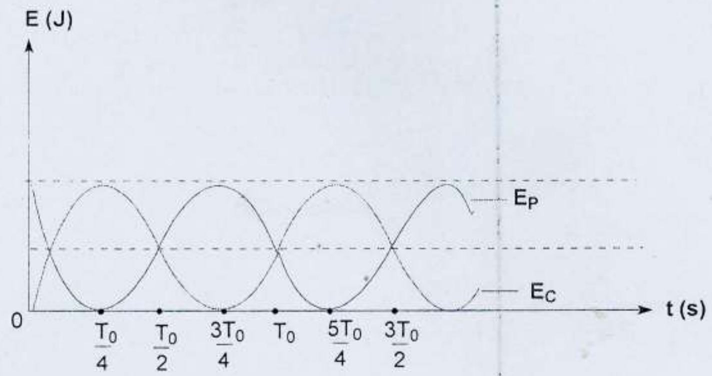
$E_c = 210^{-2} \sin^2 4\pi t \quad (J)$

d) Graphe de E_p et E_c

$E_p = E_m \cos^2 \frac{2\pi}{T_0} t \quad (J)$

$E_c = E_m \sin^2 \frac{2\pi}{T_0} t \quad (J)$

0	0	$T_0/4$	$T_0/2$	$3T_0/4$	T_0
E_p	E_m	0	E_m	0	E_m
E_c	0	E_m	0	E_m	0
E_m	210^{-2}	210^{-2}	210^{-2}	210^{-2}	210^{-2}

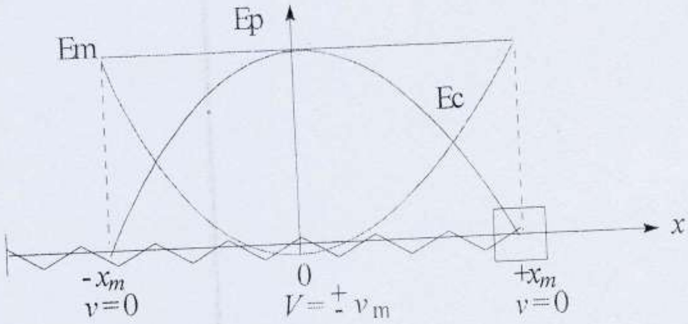


2. Puits de potentiel parabolique :

Le graphe de $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ est une parabole alors le pendule élastique oscille dans un puits de potentiel parabolique entre $-x_m$ et x_m autour de O.

$E_p = \frac{1}{2} kx^2$

x	$-x_m$	0	x_m
Ep	E_m	0	E_m
Ec	0	E_m	0



Formes de l'Em

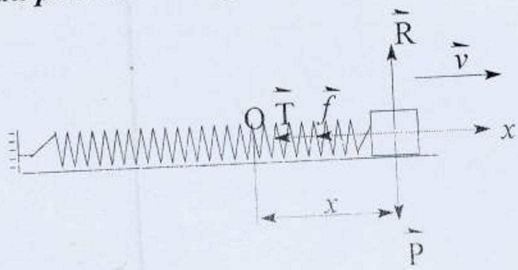
Pour $x = \pm x_m$, $E_m = E_p$

Pour $x = 0$ *(Point d'équilibre)* : $v = \pm v_m$

Pour $x = \frac{x_m}{2} \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k \frac{x_m^2}{4} \Rightarrow E_p = \frac{1}{4} E_m$

$E_C = \frac{3}{4} E_m$ *(l' Em est potentielle et cinétique)*

4. a) Equation différentielle du pendule élastique amorti



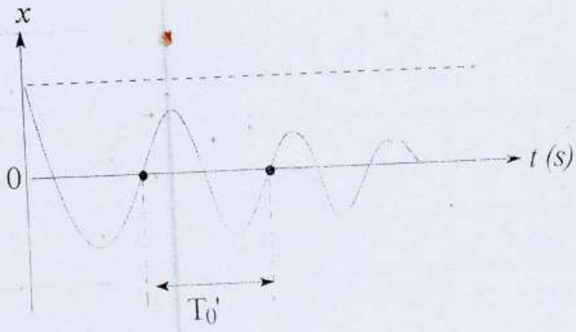
RFF suivant $o\vec{x}$: $-T - f = ma$

$$\begin{cases} T = kx \\ f = \left\|\vec{f}\right\| = \left|-\alpha\right| v = \alpha\, v = \alpha\, \dot{x} \end{cases} \quad -k\,x - \alpha\,\dot{x} = m\ddot{x} \iff m\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = 0$$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ *Equation différentielle*

Cette équation n'est pas linéaire. L'oscillateur est amorti

b) Frottements faibles : Le mouvement est pseudopériodique



$$T_0' = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0' = 0{,}5\,s$$

Energie Totale dissipée :

$$E_{(perdue)} = E_{(initiale)} = \frac{1}{2}kx_m^2$$

$$E_{(perdue)} = 2.10^{-2}\,J$$

Application _ 2

Pendule élastique verticale

On réalise un pendule élastique en accrochant à l'extrémité libre d'un ressort parfait de longueur à vide 15 cm un solide S de masse 200g. A l'équilibre on constate que la longueur du ressort est 20 cm.

1. Fais l'inventaire des forces extérieures aux solides à l'équilibre.

Ecris la condition vectorielle d'équilibre. En déduire la raideur k du ressort.

2. La position d'équilibre est choisie comme origine des espaces. On écarte le solide de la position d'équilibre de x_0 = 5cm et on l'abandonne sans vitesse. A l'instant initial le solide passe pour la 1ère fois par sa position d'équilibre.

2.1. Etablis l'équation différentielle du pendule élastique verticale

a) En appliquant la RFD

b) En appliquant la loi de la conservation de l'énergie mécanique.

2.2. En déduis :

a) La nature du mouvement

b) Les expressions et valeurs des pulsations, périodes et fréquence propres

c) Les équations horaires $x = f(t)$ et $v = g(t)$.

d) La valeur de l'énergie mécanique totale

e) La valeur de la tension du ressort lorsque l'énergie potentielle est maximale

3. On dispose maintenant le pendule précédent suivant un plan incliné de α = 30° sur l'horizontal.

3.1. Fais l'inventaire des forces appliquées au solide à l'équilibre. En déduis la condition d'équilibre du solide.

3.2. Etablis l'équation différentielle du pendule élastique sur plan incliné :

a) En appliquant la RFD

b) En appliquant la consommation de l'énergie mécanique.

c) Calcules l'énergie potentielle totale ainsi que la tension du ressort pour x = 2cm.

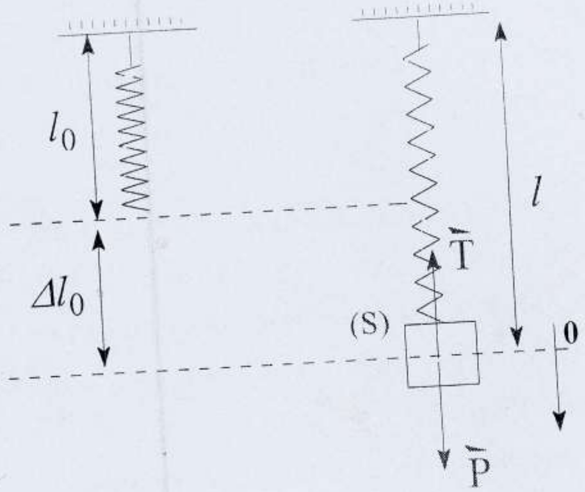
3.3. Comment varie la période du pendule lorsque :

a) m = constante
- on double k
- on divise k par 4

b) k = constante
- $m' = 9m$
- $m'' = 1/4$ de m

Solution

1. *Inventaire des forces*



Le solide (S) à l'équilibre est soumis à $\vec{P}$ et $\vec{T}$

- ***Condition vectorielle d'équilibre :***

A l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

- ***Déduction de k***

Suivant $\overrightarrow{ox}$:

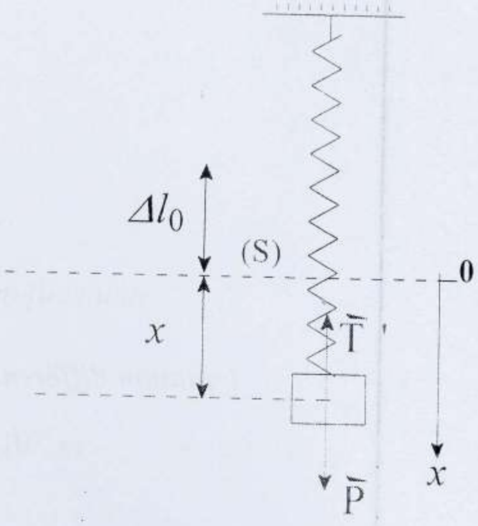
$P - T = 0 \Rightarrow mg - k\Delta l = 0 \Leftrightarrow mg = k\Delta l$

$k = \dfrac{mg}{\Delta l}$

AN : $m = 200g = 0{,}2kg$; $g = 10\ m/s^2$; $\Delta l = l - l_0 = 20 - 15 = 5cm = 5.10^{-2}\ m$

$k = \dfrac{0{,}2 \times 10}{5.10^{-2}} \Rightarrow k = 40\ N.m^{-1}$

2.2.1. Equation différentielle du pendule vertical



En appliquant la RFD en mouvement : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{T}' = m\vec{a}$

Suivant $o\vec{x}$:

$P - T = ma$

$\begin{cases} P = mg \\ T' = k(\Delta l + x) \end{cases} \Rightarrow \quad mg - k(\Delta l + x) = m\ddot{x}$

$mg - k\Delta l - kx = m\ddot{x}$

$mg - k\Delta l = 0$ (*équilibre*)

$m\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ ***Equation différentielle***

En appliquant la conservation de l'Em :

$Em = E_P + E_C = Cste$

Donc $\frac{dEm}{dt} = \dot{E}m = 0$

$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$E_P = E_{PP} + E_{PC}$

$\begin{cases} E_{PC} = \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l^2 + 2\Delta l + x^2) \\ E_{PP} = -mgh = -mgx \quad (0\ \text{choisie comme référence}) \end{cases}$

$E_P = -mgx + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + k\Delta lx + \frac{1}{2}kx^2$

$= -x(mg - k\Delta l) + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$(mg - k\Delta l) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$Em = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$\dot{E}m = 0 \quad \Rightarrow \quad k\dot{x}x + m\dot{x}\ddot{x} = 0$

$\dot{x}(kx + m\ddot{x}) = 0$

$\dot{x} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ *Equation différentielle.*

2. ***Déduction***

a) ***Nature du mouvement***

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ *est de la forme* $\ddot{x} + w_0^2 x = 0$ *alors le mouvement est sinusoïdal de pulsation* w_0.

b) ***Expression et valeur de w_0, T_0, f_0***

$$\begin{cases} \ddot{x} + w_0^2 x = 0 \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad w_0^2 = \frac{k}{m}$$

Donc :

$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ (rd/s)$; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ (s)$; $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \ (Hz)$

AN : $m = 0{,}2kg$; $k = 40\ N.m^{-1}$

$w_0 = 14{,}14\ rd/s$; $T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = 0{,}44\ s$; $f_0 = \frac{1}{T_0} = 2{,}27\ Hz$

c) ***Les équations horaires***

Une solution de l'équation différentielle est : $x = x_m \cos(w_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow \quad \dot{x} = v = w_0 x_m \sin(w_0 t + \varphi)$

$$\begin{cases} x_0 = x_m \cos\varphi & (1) \\ v_0 = \ w_0 x_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$$

A t = 0, le solide passe pour la première fois par sa position d'équilibre alors :

$$\begin{cases} v_0 < 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad v_0 = -v_m\ (2) \quad \Rightarrow \quad -v_m = \ v_m \sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi \ \frac{\pi}{2}\ rd$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}\ rd \\ w_0 = 14{,}14\ rd/s \\ x_m = 5cm = 5.10^{-2}\ m \end{cases} \Rightarrow x = 5.10^{-2}\cos(14{,}14t + \frac{\pi}{2})\ (m)\quad v = -5.10^{-2} \times 14{,}14\sin(14{,}14t + \frac{\pi}{2})$$

$$v = -0{,}70\sin(14{,}14t + \frac{\pi}{2})\quad (m/s)$$

d) La valeur de l'énergie mécanique totale

$$Em = E_P + E_C = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx_m^2$$

$AN : k = 40\ N/m \quad ; \quad \Delta l = 5.10^{-2}m \quad ; \quad x_m = 5.10^{-2}m$

$\Rightarrow \quad Em = 0{,}1\ (J)$

e) La valeur de $\vec{T}$

$T = k(\Delta l + x)$

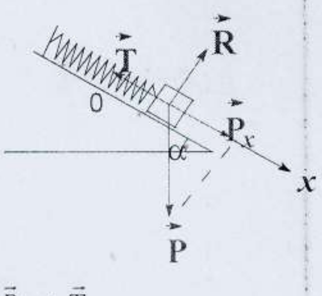
Pour $x = x_m$

$T = k(\Delta l + x_m)$

$AN : T = 40 \times 0{,}1 \Rightarrow T = 4\ N$

3. Pendule élastique sur un plan incliné

3.1. Inventaire des forces à l'équilibre



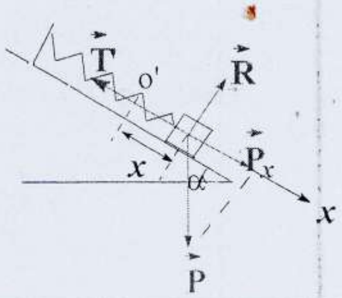
A l'équilibre le solide est soumis à $\vec{P}$, $\vec{R}$ *et* $\vec{T}$

Déduction : A l'équilibre on a : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

Suivant $o\vec{x}$: $-T + Px = 0 \quad \Rightarrow \quad -k\Delta l + mg\sin\alpha = 0$

3.2. Equation différentielle

a) RFD



$Suivant\ o\vec{x}\ :\ Px - T' = ma$

$mg\sin\alpha - k(\Delta l + x) = m\ddot{x}$

$-k\Delta l + mg\sin\alpha = 0$

$-kx = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

c) Conservation de l'énergie mécanique :

$Em = E_P + E_C = Cste$

$$Donc\ \frac{dEm}{dt} = \dot{E}m = 0$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$E_P = E_{PP} + E_{PC}$

$$\begin{cases} E_{PC} = \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2 = \frac{1}{2}k\left(\Delta l^2 + 2\Delta l + x^2\right) \\ E_{PP} = -mgx\sin\alpha \end{cases}$$

$$E_P = -mgx\sin l + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + k\Delta lx + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= -x(mg\sin\alpha - k\Delta l) + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$(mg\sin\alpha - k\Delta l) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_P = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$Em = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\dot{E}m = 0 \quad \Rightarrow \quad k\dot{x}x + m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x}(kx + m\ddot{x}) = 0$$

$$\dot{x} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$ ***Equation différentielle.***

d) L'énergie potentielle totale

$$E_P = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(\Delta l^2 + x^2\right)$$

AN : $E_P = 20(25.10^{-4} + 4.10^{-4}) \quad \Rightarrow \quad E_P = 5{,}8.10^{-2}\ J$

3. Evolution de T_0

a) m – cste

* $k' = 2k$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right) \quad \Rightarrow \quad T_0' = \frac{1}{\sqrt{2}}T_0$$

* $k'' = k/4$

$$T_0'' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k''}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k}{4}}} = \left(2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}}\right)$$

$$T_0'' = 2\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right) \quad \Rightarrow \quad T_0'' = 2T_0$$

b) **k = cste**

* $m' = 9m$: $\Rightarrow \quad T_0' = 3T_0$

* $m'' = 1/4\ m$: $\Rightarrow \quad T_0'' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right) \quad \Rightarrow \quad T_0'' = \frac{1}{2}T_0$

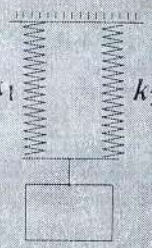
Application _ 3

Association de ressorts

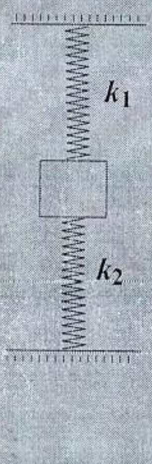
1. Dans chacun des cas suivants établis l'équation différentielle du système ; trouves l'expression de la raideur k, envisage le cas $k_1 = k_2 = k$

1.1. Ressorts en parallèle

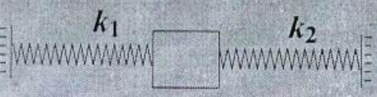
a)



b)

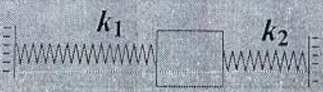


c1)



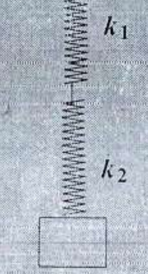
$\Delta l = 0$

c2)



$\Delta l_1 > \Delta l_2 > x_m$

1.2. Ressorts en série



2. Equations du mouvement

Un pendule élastique linéaire d'équation $-10^{-2}\ddot{x} = x$ est en mouvement. Etablis les équations $x = f(t)$ et $v = g(t)$ des cas suivants :

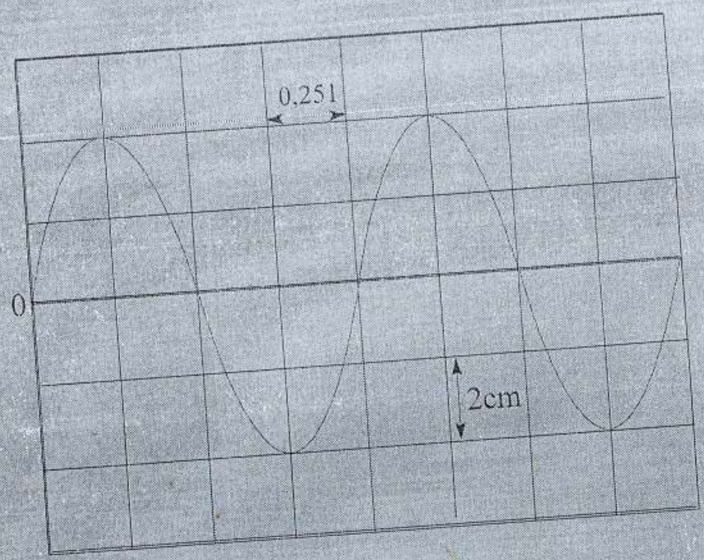
a) à $t=0$ $\begin{cases} x_0 = 5cm \\ v_0 = 0 \end{cases}$; b) à $t=0$ $\begin{cases} x_0 = -5cm \\ v_0 = 0 \end{cases}$; c) à $t=0$ $\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = 0{,}5m/s \end{cases}$

d) à $t=0$ $\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = -0{,}5 \end{cases}$; e) à $t=0$ $\begin{cases} x_0 = 2cm \\ v_0 = 2m/s \end{cases}$; f) à $t=0$ $\begin{cases} x_0 = 2cm \\ v_0 < 0 \end{cases}$

$A\ t_1 = 7{,}8.10^{-2}s,\ x_1 = 0$ **dans le sens négatif.**

3. Exploitation de graphe de $x = f(t)$

L'enregistrement de $x = f(t)$ d'un pendule élastique de masse 100g est représenté sur la figure suivante :



Trouves en utilisant le graphe

a) Les conditions initiales.

b) La période, la pulsation, l'amplitude.

c) L'équation horaire $x = f(t)$.

d) La valeur de k est celle de l'Em.

e) Les dates auxquelles Em est potentielle.

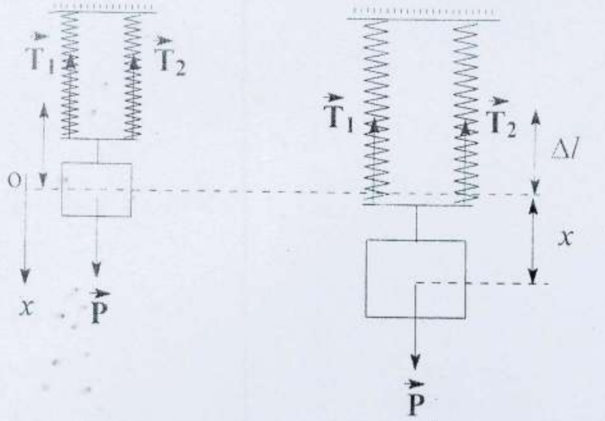
Solution

1.

1.1. Ressort en parallèle :

Deux ressorts sont en parallèle lorsqu'ils sont tous liés directement aux solides. Dans ce cas, ils o[nt le] même allongement mais des tensions différentes.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x \\ T = T_1 + T_2 \end{cases} \quad ; \quad K = k_1 + k_2$$

a) 

A l'équilibre suivant (ox) :

$P - T_1 - T_2 = 0$

$mg - k_1\Delta l - k_2\Delta l = 0$

En mouvement suivant (ox)

$P - T_1' - T_2' = m\ddot{x}$

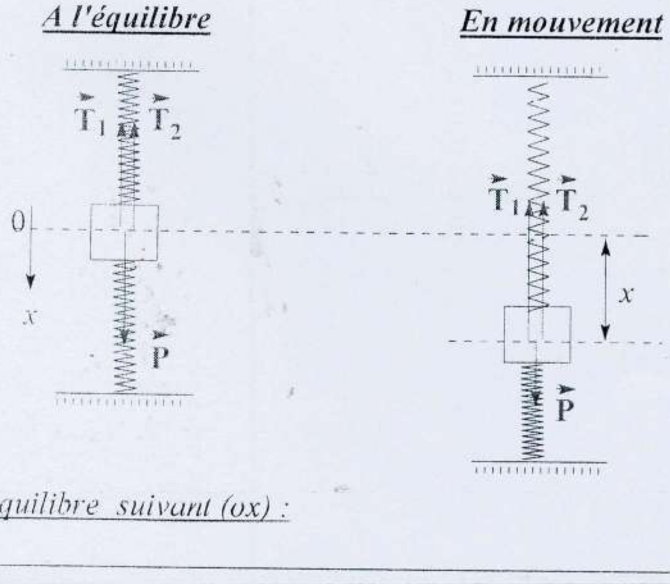
$mg - k_1(\Delta l + x) - k_2(\Delta l + x) = m\ddot{x}$

$mg - k_1\Delta l - k_2\Delta l = 0 \quad \Rightarrow \quad -k_1x - k_2x = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + x(k_1 + k_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{k_1 + k_2}{m}x = 0$

$K = k_1 + k_2$

Pour $k_1 = k_2 \quad \Rightarrow \quad K = 2k$

b) 

A l'équilibre suivant (ox) :

$P - T_1 - T_2 = 0$

$mg - k_1\Delta l - k_2\Delta l = 0$

<u>En mouvement suivant (ox)</u>

$P - T_1' - T_2' = m\ddot{x}$

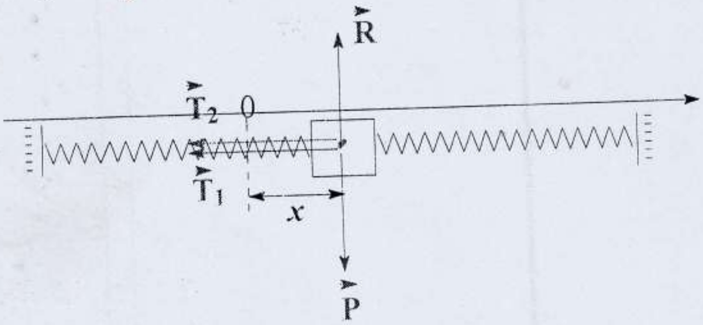
$mg - k_1(\Delta l + x) - k_2(\Delta l + x) = m\ddot{x}$

$mg - k_1\Delta l - k_2\Delta l = 0 \quad \Rightarrow \quad -k_1x - k_2x = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + x(k_1 + k_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \dfrac{k_1 + k_2}{m}x = 0$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

c-1) Ressorts non allongés à l'équilibre



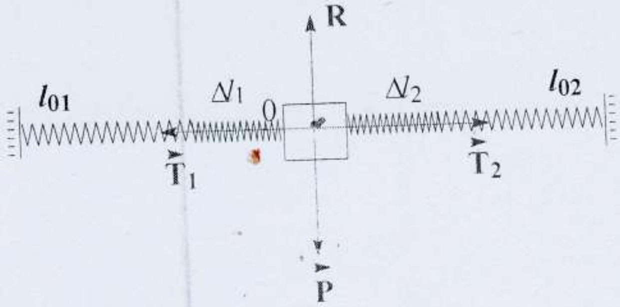
RFD suivant ox

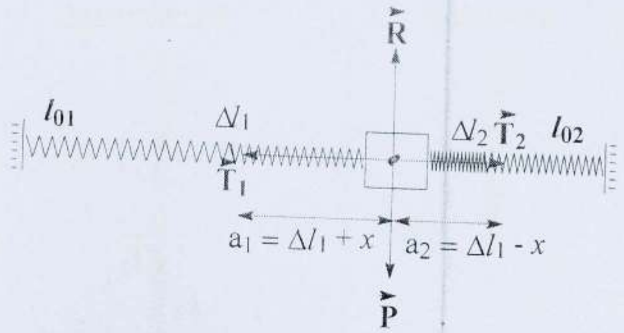
$T_1 - T_2 = m\ddot{x}$

$-k_1x - k_2x = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \dfrac{k_1 + k_2}{m}x = 0$

c-2) Ressorts allongés à l'équilibre





A l'équilibre suivant ox :

$$-T_1 + T_2 = 0$$

$$-k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2 = 0$$

En mouvement

RFD suivant ox

$$-T_1 + T_2 = m\ddot{x}$$

$$-k_1(\Delta l_1 + x) - k_2(\Delta l_2 - x) = m\ddot{x}$$

$$-k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2 = 0$$

$$-k_1 x - k_2 x = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$$

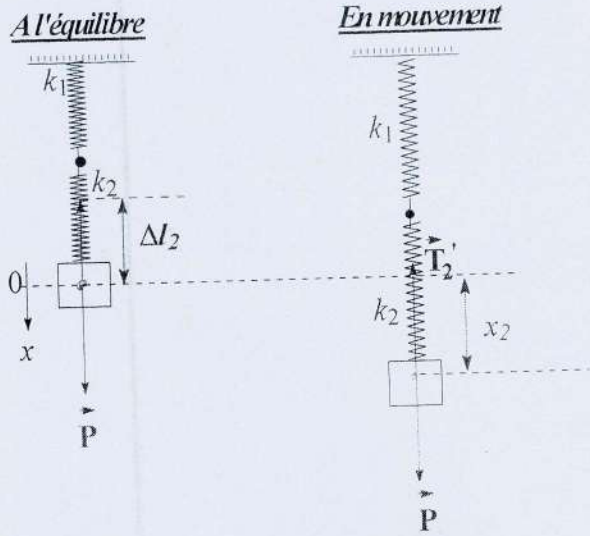
1.2. En série : Un seul des ressorts est lié à S

Dans ce cas : $\begin{cases} T_1 = T_2 \Rightarrow k_1x_1 = k_2x_2 \\ x = x_1 + x_2 \\ K = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2} \end{cases}$

$$x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2}x$$

$$x_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2}x$$

b)



A l'équilibre suivant (ox) :

$P - T_2 = 0$

$mg - k_2 \Delta l = 0$

En mouvement suivant (ox)

$P - T_2' = m\ddot{x}$

$mg - k_2(\Delta l + x_2) = m\ddot{x}$

$mg - k_2\Delta l = 0 \quad \Rightarrow \quad -k_2 x_2 = m\ddot{x}$

$$x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x$$

$$\frac{-k_2 k_1}{k_1 + k_2} x = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k_2 k_1}{k_1 + k_2} x = 0$$

$$K = \frac{k_2 k_1}{k_1 + k_2}$$

Pour $k1 = k2$

$$K = \frac{k^2}{2k} = \frac{k}{2}$$

2. *Equation horaires*

a. *L'oscillateur est linéaire alors*

$x = x_m \cos(w_0 t + \varphi)$

$\dot{x} = v = -w_0 x_m \sin(w_0 t + \varphi)$

$$à\ t=0\quad \begin{cases} x_0 = x_m \cos\varphi & (1) \\ v_0 = -wx_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$$

$$à\ t=0\quad \begin{cases} x_0 = 5cm \\ v_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 = x_m$$

$(1) \quad \Rightarrow \quad x_m = x_m \cos\varphi$

$\cos\varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0$

$$\begin{cases} x_m = 5\,cm = 510^{-2}\,m \\ w_0 = 10\ (rd/s) \end{cases}$$

$x = 510^{-2}\cos 10t \ \ (m)$

$v = -0{,}5\sin 10t \ \ (m/s)$

b) $$à\ t=0\quad \begin{cases} x_0 = 5cm \\ v_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 = -x_m$$

$-x_m = x_m \cos\varphi$

$\cos\varphi = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \pi\ (rd)$

$$\begin{cases} x_m = 5\,cm = 510^{-2}\,m \\ w_0 = 10\ (rd/s) \\ \varphi = \pi\ (rd) \end{cases}$$

$x = 510^{-2}\cos(10t+\pi) \ \ (m)$

$v = -0{,}5\sin(10t+\pi) \ \ (m/s)$

c) $$à\ t=0\quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = 0{,}5\,m/s \end{cases} \Rightarrow \quad v_0 = v_m$$

$(2) \quad v_m = -v_m \sin\varphi$

$\sin\varphi = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\ (rd)$

$v_m = w_0 x_m \quad \Rightarrow \quad x_m = \dfrac{v_m}{w_0} = \dfrac{0{,}5}{10} = 5.10^{-2}\,m$

$x = 510^{-2}\cos\left(10t - \dfrac{\pi}{2}\right) \ \ (m)$

$v = -0{,}5\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{2}\right) \ \ m/s$

d) $$à\ t=0\quad \begin{cases} x_0 - 0 \\ v_0 = -0{,}5\,m/s \end{cases} \Rightarrow \quad v_0 = -v_m$$

$$\begin{cases} x_0 = 2cm = 2.10^{-2}\,m \\ v_0 = 0{,}2\,m/s \\ w_0 = 10\,rd/s \end{cases} \Rightarrow \quad x_m = \sqrt{4.10^{-4} + 4.10^{-4}} = 2\sqrt{2}.10^{-2}\,m$$

$$v_0 = -w_0 x_m \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{-v_0}{w_0 x_m}\right)$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{-0.2}{10\times 2\sqrt{2}.10^{-2}}\right) = -\frac{\pi}{4}\ rd$$

$$x = 2\sqrt{2}.10^{-2}\cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ (m)$$

$$v = -0{,}2\sqrt{2}\sin\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ (m/s)$$

f) à $t = 0$ $\begin{cases} x_0 = 2cm \\ v_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi > 0$

à $t_1 = 7{,}8.10^{-2}\,s,\ x_1 = 0$

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{10}$$

$$\frac{T_0}{t_1} = \frac{2\pi\times 100}{10\times 7{,}8} = 8$$

$$\frac{T_0}{t_1} = 8 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{T_0}{8}$$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{T_0}{8} + \varphi\right) = 0$$

$$x_m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_m \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} rd$$

$$x_0 = x_m \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad x_m = \frac{x_0}{\cos\varphi} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$x_m = 2\sqrt{2}cm = 2\sqrt{2}.10^{-2}\,m$$

$$x = 2\sqrt{2}.10^{-2}\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)\ (m)$$

$$v = -0{,}2\sqrt{2}\sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)\ (m/s)$$

$(2)\quad v_m = -v_m \sin\varphi$

$\sin\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}\ (rd)$

$v_m = w_0 x_m \quad \Rightarrow \quad x_m = \dfrac{v_m}{w_0} = \dfrac{0{,}5}{10} = 5.10^{-2}\ m$

$x = 510^{-2}\cos\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)\ (m)$

$v = -0{,}5\sin\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)\ m/s$

e) $\quad \text{à } t = 0 \quad \begin{cases} x_0 = 2\,cm \\ v_0 = 0{,}2\,m/s \end{cases}$

Methode 1

$\begin{cases} x_0 = x_m\cos\varphi & (1) \\ v_0 = -w_0 x_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$

$\dfrac{(2)}{(1)} \Rightarrow \dfrac{-w_0 x_m \sin\varphi}{x_m\cos\varphi} = \dfrac{v_0}{x_0}$

$-w_0\tan\varphi = \dfrac{v_0}{x_0} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{-v_0}{w_0 x_0}\right)$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{-0{,}2}{10\times 2.10^{-2}}\right) = -\dfrac{\pi}{4}\ rd$

$x_0 = x_m\cos\varphi \Rightarrow x_m = \dfrac{x_0}{\cos\varphi} = \dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\ cm$

$x = 2\sqrt{2}.10^{-2}\cos\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right)\ (m)$

$v = -0{,}2\sqrt{2}\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right)\ (m/s)$

Méthode 2

$E_0 = \dfrac{1}{2}kx_0^2 + \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}kx_m^2$

$x_0^2 + \dfrac{m}{k}v_0^2 = x_m^2$

$x_m^2 = x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{w_0^2} \quad \Rightarrow \quad x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{w_0}\right)^2}$

$$\begin{cases} x_0 = 2cm = 2.10^{-2}\,m \\ v_0 = 0,2\,m/s \\ w_0 = 10\,rd/s \end{cases} \Rightarrow \quad x_m = \sqrt{4.10^{-4} + 4.10^{-4}} = 2\sqrt{2}.10^{-2}\,m$$

$$v_0 = -w_0 x_m \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{-v_0}{w_0 x_m}\right)$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{-0,2}{10 \times 2\sqrt{2}.10^{-2}}\right) = -\frac{\pi}{4}\ rd$$

$$x = 2\sqrt{2}.10^{-2}\cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ (m)$$

$$v = -0,2\sqrt{2}\sin\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ (m/s)$$

f) à $t = 0$ $\begin{cases} x_0 = 2cm \\ v_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi > 0$

à $t_1 = 7,8.10^{-2}\,s,\ x_1 = 0$

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{10}$$

$$\frac{T_0}{t_1} = \frac{2\pi \times 100}{10 \times 7,8} = 8$$

$$\frac{T_0}{t_1} = 8 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{T_0}{8}$$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{8} + \varphi\right) = 0$$

$$x_m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_m \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} rd$$

$$x_0 = x_m \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad x_m = \frac{x_0}{\cos\varphi} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$x_m = 2\sqrt{2}cm = 2\sqrt{2}.10^{-2}\ m$$

$$x = 2\sqrt{2}.10^{-2}\cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)\ (m)$$

$$v = -0,2\sqrt{2}\sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)\ (m/s)$$

3. *a) les conditions initiales*

$$à\ t=0\ \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 > 0 \end{cases}$$

b) Période et pulsation

$$T_0 = 0{,}25 \times 4 = 1s$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rd/s$$

L'amplitude : $x_m = 2 \times 2 = 4cm$

c) L'équation horaire

D'après le graphe, le mouvement est sinusoïdal alors : $x = x_m \cos(w_0 t + \varphi)$ *par conséquent*

$$\dot{x} = v = -w_0 x_m \sin(w_0 t + \varphi)$$

$$à\ t=0\ \begin{cases} x_0 = x_m \cos\varphi \\ v_0 = -w_0 x_m \sin\varphi \end{cases}$$

$$à\ t=0\ \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi < 0$$

$$(1) \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}\ rd$$

$$x = 4.10^{-2} \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\ (m)$$

$$v = -0{,}25 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\ (m/s)$$

d) Raideur du ressort

$$w_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = w_0^2 m = (2\pi)^2 \times 0{,}1 = 4\ N/m$$

<u>*Energie mécanique :*</u>

$$E_m = \frac{1}{2} kx_m^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times (4.10-2) = 3{,}2.10^{-3}\ J$$

$$E_m = 3{,}2.10^{-3}\ J$$

Les dates auxquelles Em est potentielle.

Em est potentielle lorsque Ep est maxi (Ec = 0) : En ces moments x = ± xm.

Ainsi pour $t \in \{0{,}25\ ;\ 1{,}25\ ;\ 2{,}25\ ;\ 3{,}25\}$

2.2. Déterminer le pendule de torsion

Application _ 4

On réalise un pendule de torsion en fixant à l'extrémité libre d'un fil de torsion de constante C un disque homogène de rayon 10cm et de masse 200g.

Lorsqu'on écarte le système de sa position d'équilibre de $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} rd$ et on le lance vers sa position d'équilibre avec une vitesse $\dot{\alpha}_0$, il oscille librement entre $-\alpha_m$ et $+\alpha_m$ autour de O ; la durée de 10 oscillations est 5s.

A $t_1 = 6{,}25.10^{-2} s$ l'oscillateur passe pour la 1ère fois par sa position d'équilibre.

1. Etablis l'équation différentielle du système oscillant librement.
En déduis la valeur de C (on exprimera littéralement w_0, T_0 et N_0).

2. a) Etablis les équations horaires $\alpha = f(t)$ et $\dot{\alpha} = f(t)$

b) En déduis les expressions instantanées des énergies potentielles de torsion et cinétique de rotation. Trouver l'expression et la valeur de l'énergie mécanique totale.
Dans quel cas cette énergie est – elle potentielle, cinétique.

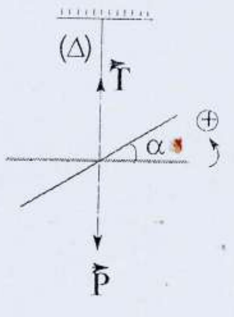
c) Montres que le pendule de torsion oscille dans un puits de potentielle parabolique. Trace-les.

3. Une partie du disque est placé dans l'entre – fer d'un aimant en U. Décris qualitativement le mouvement ultérieur du disque dans le champ magnétique $\vec{B}$. En déduit quelques applications du courant de Foucault.

Solution

1. *Equation différentielle d'un pendule de torsion*

- *En appliquant la RFD*



$$\sum \mathcal{M}\vec{F}_{ext}(\Delta) = J\ddot{\alpha}$$

$$\mathcal{M}\vec{T}_{(\Delta)} + \mathcal{M}\vec{P}_{(\Delta)} + \mathcal{M}\varepsilon_{(\Delta)} = J\ddot{\alpha}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}\,\vec{T}_{(\Delta)} = \mathcal{M}\,\vec{P}_{(\Delta)} = 0 \\ \mathcal{M}\,\varepsilon_{(\Delta)} = -C\alpha \end{cases} \Rightarrow -C\alpha = J\ddot{\alpha} \Leftrightarrow J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$$

$\ddot{\alpha} + \dfrac{C}{J}\alpha = 0$ **Equation Différentielle**

En appliquant la conservation de l'Em

$$Em = E_P + E_C = Cste$$

$$\dot{E}m = \dot{E}_P + \dot{E}_C = 0$$

$$\begin{cases} E_P = \dfrac{1}{2}C\alpha^2 \Rightarrow \dot{E}_P = C\dot{\alpha}\alpha \\ E_C = \dfrac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 \Rightarrow \dot{E}_C = J\ddot{\alpha}\dot{\alpha} \end{cases}$$

$$\dot{E}m = 0 \Rightarrow J\ddot{\alpha}\dot{\alpha} + C\dot{\alpha}\alpha = 0$$

$$\dot{\alpha}(J\ddot{\alpha} + C\alpha) = 0$$

$$\dot{\alpha} \neq 0 \Rightarrow J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$$

$\ddot{\alpha} + \dfrac{C}{J}\alpha = 0$ **Equation Différentielle**

Déduction des expressions de w_0, T_0, N_0

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \dfrac{C}{J}\alpha = 0 \\ \ddot{\alpha} + w_0^2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow w_0^2 = \frac{C}{J} \Leftrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} \; ; \quad N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J}}$$

Valeur de C

$$\begin{cases} w_0^2 = \dfrac{4\pi^2}{T_0^2} \\ w_0^2 = \dfrac{C}{J} \end{cases} \Rightarrow \frac{C}{J} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J}{T_0^2}$$

$$\begin{cases} \pi^2 \approx 10 \\ T_0 = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}\,s \\ J = \dfrac{1}{2}mR^2 = 10^{-3}\,Kg.m^2 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{40 \times 10^{-3}}{1/4} = 16.10^{-2} \Rightarrow C = 16.10^{-2}\,N.m/rad$$

2. a) Equations Horaires

Une solution de l'équation différentielle est : $\alpha = \alpha_m \cos(w_0 t + \varphi)$

$\dot{\alpha} = -w_0\alpha_m \sin(w_0 t + \varphi)$

$A\ t = 0 \quad \begin{cases} \alpha_0 = \alpha_m \cos\varphi & (1) \\ -\alpha_0 = w_0\alpha_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$

$à\ t_1 = 6{,}25.10^{-2}\ s$

$\dfrac{T_0}{t_1} = \dfrac{0{,}5}{6{,}25} = 8 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{T_0}{t_1} = 8$, *le système passe par sa position d'équilibre pour la première fois alors*

$à\ t = t_1 \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -\dot{\alpha}_1 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi > 0$

$0 = \alpha_m \cos(w_0 t + \varphi)$

$\alpha_m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(w_0 t + \varphi) = 0$

$$\begin{cases} w_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} \\ t_1 = \dfrac{T_0}{8} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{8} + \varphi\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}\ rd$$

$(1) \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \alpha_m \cos\varphi$

$$\alpha_m = \frac{\alpha_0}{\cos\varphi} = \frac{\pi/4}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1{,}12\ rd$$

$$\alpha = 1{,}12\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ (rd)$$

$$\dot{\alpha} = -14{,}1\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\ (rd/s)$$

Valeur de $\dot{\alpha}_0$

$$\dot{\alpha}_0 = -14{,}1\sin\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha}_0 = -9{,}87\ \ (rd/s)$$

b) Expressions instantanées des énergies

- **Energie potentielle de torsion**

$$E_P = \frac{1}{2}C\alpha^2$$

$$\alpha = \alpha_m \cos(w_0 t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad E_P = \frac{1}{2}C\alpha_m^2 \cos^2(w_0 t + \varphi)$$

- ***Energie cinétique de rotation***

$$E_C = \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2$$

$$\dot{\alpha} = -w_0\alpha_m \sin(w_0 t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad E_P = \frac{1}{2}Jw_0^2\alpha_m^2 \sin^2(w_0 t + \varphi)$$

$$w_0^2 = \frac{C}{J} \quad \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2}J\frac{C}{J}\alpha_m^2 \sin^2(w_0 t + \varphi)$$

$$E_C = \frac{1}{2}C\alpha_m^2 \sin^2(w_0 t + \varphi) \quad (J)$$

- ***Energie mécanique totale***

$Em = E_P + E_C = \frac{1}{2}C\alpha_m^2 = Cste$. *Il y a transformation mutuelle entre E_P et E_C.*

AN :

$$E_P = \frac{1}{2}\times 16.10^{-2}(1{,}12)^2 \cos^2\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$E_P = 0.1\cos^2\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (J)$$

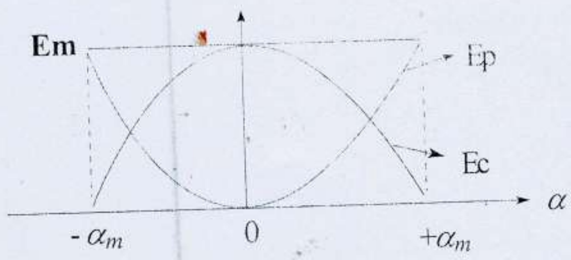
$$E_C = 0{,}1\sin^2\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (J)$$

$$Em = 0{,}1 \quad (J)$$

c) Cuvette de potentiel parabolique :

Le graphe de $E_P = \frac{1}{2}C\alpha^2$ *en fonction est α est une parabole alors le pendule de torsion oscille dans une cuvette de potentiel parabolique entre -αm et +αm autour de 0.*

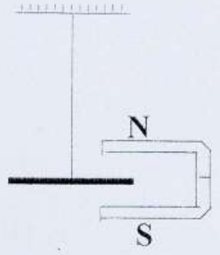
x	$-\alpha_m$	0	α_m
Ep	E_m	0	E_m
Ec	0	E_m	0



Pour $\alpha = \pm\alpha_m$, $E_m = E_p$; $\dot{\alpha} = 0$

Pour $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = \pm\alpha_m$, l' Em est cinétique

3. Description qualitative



Au cours du mouvement de la tige dans $\vec{B}$, il y a variation du flux d'induction ; cela entraine la naissance d'une f.é.m. induite et par la suite d'un courant induit. La force électromagnétique crée par ce courant s'oppose au mouvement. Il y a freinage progressive de la tige jusqu'à son arrêt.

Déduction :

Les courants de Foucault sont utilisés pour le freinage électromagnétique des véhicules lourds (métro, train, camion). Ils peuvent provoquer ce pendant de graves incendies dans les installations.

Application _ 5

Le Pendule de torsion avec surcharges

Pour déterminer le moment d'inertie J_0 d'une tige homogène AB de longueur l = 20 cm et la constante de torsion C d'un fil de cuivre, on réalise les deux expériences suivantes.

- **On fixe à l'extrémité libre du fil la tige AB en son centre M. Lorsqu'on écarte la tige de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{6}\ rd$ et on l'abandonne sans vitesse, le système passe pour la 3e fois par sa position d'équilibre en 1,25s.**
- **On place aux extrémités A et B de la tige deux masselottes identiques de valeur 100g ; lorsqu'on fait osciller le système, la durée de 10 oscillations devient 10,5s.**

1. **Etablis l'équation différentielle du système oscillant sans surcharge. En déduis la période des deux systèmes.**

Trouve les valeurs de J_0 et C.

2. **Etablis les équations horaires $\theta = f(t)$ et $\dot{\theta} = h(t)$ pour le système correspondant à l'expérience.**
3. **Comment varie la période T du système lorsque :**

- **On double C.**
- **On double la masse de la tige.**
- **On double l'amplitude des oscillations.**

Solution

1. Equation différentielle :

En appliquant la conservation de l'Em on trouve : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$

Déduction des périodes

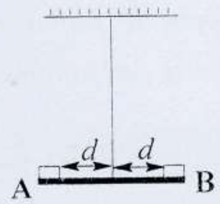
$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} \quad or \quad w_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$$

Ainsi :

Pour le pendule sans surcharge :

$$J = J_0 \quad \Rightarrow \quad T_{01} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}} \quad (s)$$

Pour le pendule avec surcharge : $J = J_0 + J_1 + J_2$



$$J_1 = J_2 = md^2$$

$$J = J_0 + 2md^2 \quad \Rightarrow \quad T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2md^2}{C}}$$

Valeur de J_0 et C

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2 = \frac{J_0 + 2md^2}{C} \times \frac{C}{J_0} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2 = \frac{J_0 + 2md^2}{J_0}$$

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2 = 1 + \frac{2md^2}{J_0} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2 - 1 = \frac{2md^2}{J_0}$$

$$J_0 = \frac{2md^2}{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2 - 1}$$

$$AN : \begin{cases} m = 0,1\,kg \\ d = 0,1\,m \\ T_{02} = \frac{10,5}{10} = 1,05\,s \\ \frac{5}{4}T_{01} = 1,25\,s \;\Rightarrow\; T_{01} = \frac{1,25 \times 4}{5} = 1s \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad J_0 = \frac{2 \times 0,1 \times (0,1)^2}{(1,05)^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad J_0 = 210^{-2}(kg.m^2)$$

La valeur de C

$$(T_{01})^2 = \frac{4\pi^2 J_0}{C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi^2 J_0}{T_{01}^2}$$

$$\begin{cases} J_0 = 2.10^{-2}\ kg.m^2 \\ \pi^2 = 10 \\ T_{01} = 1\ s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}8 \quad (N.m/rd)$$

Etablissons les équations horaires $\theta = f(t)$ *et* $\dot{\theta} = h(t)$

Une solution de l'équation différentielle est $\theta = \theta_m \cos(w_0 t + \varphi)$

$$A\ t = 0 \quad \begin{cases} \theta_0 = \theta_m \cos\varphi & (1) \\ -\dot{\theta}_0 = w_0 \alpha_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$$

$$A\ t = 0 \quad \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{6}\ rd \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_0 = \theta_m$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_{01}} = 2\pi\ rd/s$$

$$\theta = 0{,}52 \cos 2\pi t \quad (rd)$$

$$\theta = -3{,}3 \sin 2\pi t \quad (rd/s)$$

3. Variation de T_0

- $C' = 2C \quad \Rightarrow \quad T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{2C}} \quad \Leftrightarrow \quad T_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} T_0$
- $m' - 2m \quad \Rightarrow \quad T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{J_0'}{C}}$

$$J_0 = \frac{1}{12} ml^2$$

$$J'_0 = \frac{1}{12} \times 2ml^2 = 2J_0$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2J_0}{C}} \quad \Rightarrow \quad T_0' = \sqrt{2}\, T_0$$

$$\theta_m' = 2\theta_m \quad \Rightarrow \quad T_0' = T_0$$

Solution

1. Equation différentielle :

En appliquant la conservation de l'Em on trouve : $\ddot{\theta}+\frac{C}{J}\theta=0$

Déduction des périodes

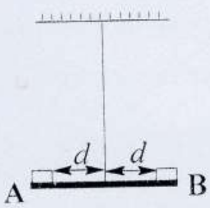
$T_0=\frac{2\pi}{w_0}$ *or* $w_0=\sqrt{\frac{C}{J}}$ $\Rightarrow$ $T_0=2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$

Ainsi :

Pour le pendule sans surcharge :

$J=J_0 \Rightarrow T_{01}=2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}}\ (s)$

Pour le pendule avec surcharge : $J=J_0+J_1+J_2$



$J_1=J_2=md^2$

$J=J_0+2md^2 \Rightarrow T_{02}=2\pi\sqrt{\frac{J_0+2md^2}{C}}$

Valeur de J_0 et C

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2=\frac{J_0+2md^2}{C}\times\frac{C}{J_0} \Rightarrow \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2=\frac{J_0+2md^2}{J_0}$$

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2=1+\frac{2md^2}{J_0} \Rightarrow \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2-1=\frac{2md^2}{J_0}$$

$$J_0=\frac{2md^2}{\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^2-1}$$

$$AN:\begin{cases} m=0{,}1\,kg \\ d=0{,}1\,m \\ T_{02}=\frac{10{,}5}{10}=1{,}05\,s \\ \frac{5}{4}T_{01}=1{,}25\,s \Rightarrow T_{01}=\frac{1{,}25\times4}{5}=1s \end{cases} \Leftrightarrow J_0=\frac{2\times0{,}1\times(0{,}1)^2}{(1{,}05)^2-1} \Rightarrow J_0=210^{-2}(kg.m^2)$$

La valeur de C

$$(T_{01})^2 = \frac{4\pi^2 J_0}{C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi^2 J_0}{T_{01}^2}$$

$$\begin{cases} J_0 = 2.10^{-2}\ kg.m^2 \\ \pi^2 = 10 \\ T_{01} = 1\ s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}8 \quad (N.m/rd)$$

Etablissons les équations horaires $\theta = f(t)$ et $\dot{\theta} = h(t)$

Une solution de l'équation différentielle est $\theta = \theta_m \cos(w_0 t + \varphi)$

$$A\ t = 0 \quad \begin{cases} \theta_0 = \theta_m \cos\varphi & (1) \\ -\dot{\theta}_0 = w_0 \alpha_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$$

$$A\ t = 0 \quad \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{6}\ rd \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_0 = \theta_m$$

$(1) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_{01}} = 2\pi\ rd/s$$

$\theta = 0{,}52 \cos 2\pi t \quad (rd)$

$\theta = -3{,}3 \sin 2\pi t \quad (rd/s)$

3. Variation de T_0

- $C' = 2C \quad \Rightarrow \quad T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{2C}} \quad \Leftrightarrow \quad T_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} T_0$
- $m' - 2m \quad \Rightarrow \quad T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{J_0'}{C}}$

$$J_0 = \frac{1}{12} ml^2$$

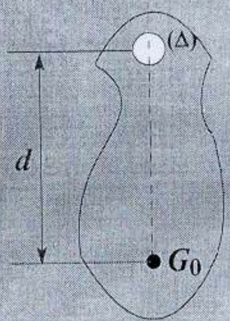
$$J'_0 = \frac{1}{12} \times 2ml^2 = 2J_0$$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{2J_0}{C}} \quad \Rightarrow \quad T_0' = \sqrt{2}\, T_0$$

$$\theta_m' = 2\theta_m \quad \Rightarrow \quad T_0' = T_0$$

Application _ 5

Pendule Pesant



$m = 0,5\ kg$

$d = 20\ cm$

$J_0 = 2.10^{-2}\ kg.m^2$

On réalise un pendule pesant en fixant un solide S de masse 500g autour d'un axe (Δ) (figure) lorsqu'on écarte le solide de sa position d'équilibre de $\theta_0 = \frac{\pi}{8}\ rd$ (supposé faible) et on l'abandonne sans vitesse à t = 0, il oscille librement autour de (Δ).

1. a) **Etablis l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur d'un pendule pesant effectuant des oscillations de faible amplitudes.**

b) **En déduis l'équation différentielle du pendule pesant.**

c) **Retrouve cette équation différentielle en appliquant le théorème du centre d'inertie.**

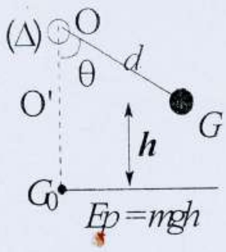
d) **En déduis la nature du mouvement ainsi que l'expression et la valeur de N_0, T_0 et w_0**

2. **Etablis les équations horaires** $\theta = f(t)$ **et** $\dot{\theta} = h(t)$

Calcule l'énergie mécanique du système à la position d'équilibre.

Solution

1. a) Expression de l'énergie potentielle de pesanteur d'un pendule pensant effectuant des oscillations de faibles amplitudes.



$$On\ a :\ h = OG_0' = OG_0 - OO' = d - d\cos\theta$$

$$h = d(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad E_p = mgd(1-\cos\theta)$$

$$\theta_m\ faible \quad \Rightarrow \quad \theta\ faible\ donc\ \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$E_P = mgd\left[1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right]$$

$$E_P = mgd\left(1-1+\frac{\theta^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad E_P = \frac{1}{2}mgd\theta^2$$

b) Déduction de l'équation différentielle

$$Em = E_P + E_C = Cste$$

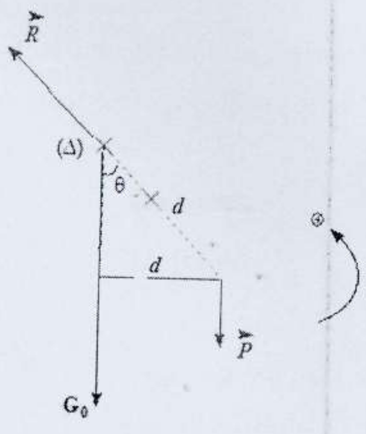
$$\dot{E}m = \dot{E}_P + \dot{E}_C = 0$$

$$\begin{cases} E_P = \frac{1}{2}mgd\theta^2 \quad \Rightarrow \quad E_P = mgd\dot{\theta}\theta \\ E_C = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad E_C = J\ddot{\theta}\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\dot{E}m = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}\left(J\ddot{\theta} + mgd\theta\right) = 0$$

$$\dot{\theta} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J}\theta = 0$$ ***Equation différentielle***

c) Equation différentielle en appliquant la RFD



RFD :

$$\sum \mathcal{M}_{\vec{F}_{ext}}(\Delta) = J\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{P}(\Delta)} + \mathcal{M}_{\vec{R}(\Delta)} = J\ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\vec{R}(\Delta)} = 0 \\ \mathcal{M}_{\vec{P}(\Delta)} = -mga = -mgd\sin\theta \end{cases}$$

$$-mgd\sin\theta = J\ddot{\theta}$$

$$J\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$$

$$\theta \text{ faible} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \approx \theta \ rd$$

$$J\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$$

$J\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \dfrac{mgd}{J}\theta = 0$ ***Equation différentielle***

d. Déductions

Nature du mouvement :

$\ddot{\theta} + \dfrac{mgd}{J}\theta = 0$ *est de la forme* $\ddot{\theta} + w_0^2\theta = 0$ *alors le mouvement est sinusoïdal de pulsation* w_0.

- ***Les expressions et valeurs de :***

- *La pulsation propre:*

$$\begin{cases}\ddot{\theta} + w_0^2\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{mgd}{J}\theta = 0\end{cases} \Rightarrow \quad w_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}} \ (rd/s)$$

- *La période propre*

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} \ (s)$$

- *La fréquence propre*

$$N_0 = \frac{1}{T_0} \quad \Rightarrow \quad N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{J}} \ (Hz)$$

AN

$$\begin{cases} m = 0{,}5\,kg \\ d = 20cm = 20.10^{-2}\,m \\ J_0 = 2.10^{-2}\,kg.m^2 \\ J = J_0 + md^2 = 2.10^{-2} + 0{,}5 \times 4.10^{-2} = 4.10^{-2}\,kg/m^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad w_0 = \sqrt{\frac{0{,}2 \times 10 \times 0{,}5}{4.10^{-2}}} \quad \Rightarrow \quad w_0 = 5\,rd/s$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{5} = 1{,}25\,s$$

$$N_0 = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8\,Hz$$

2. Equation horaire

$$\theta = \theta_m \cos(w_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -w_0\theta_m \sin(w_0 t + \varphi)$$

D'après les conditions initiales : $\theta_m = \theta_0 = \dfrac{\pi}{8} = 0{,}4$ *et* $\varphi = 0$

$\theta = 0,4\cos 5t \quad (rd)$

$\dot{\theta} = -2\sin 5t \quad (rd/s)$

L'énergie à la position d'équilibre

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_m = \frac{1}{2}\times 4.10^{-2}\times 4 \quad \Rightarrow \quad E = 8.10^{-2}\,J$$

2.4. Déterminer le pendule simple

Application _ 1

On réalise un pendule simple en fixant à l'extrémité libre d'un fil inextensible de longueur $\ell = 1m$ un solide ponctuel de masse m = 200g.

On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_0 = \frac{\pi}{8}\,rd$ (supposé faible) et on l'abandonne sans vitesse à t = 0.

1. Etablis l'équation différentielle du pendule simple oscillant librement.

a) En appliquant la RFD.

b) En appliquant la conservation de l'énergie emmagasinée.

En déduis la nature du mouvement ainsi que l'expression et la valeur de w_0, T_0 eN_0.

2. Etablis les équations horaires $\alpha = f(t)$ et $\dot{\alpha} = h(t)$

3. Etablis

a) L'expression de la vitesse linéaire v en fonction de α, α_m, l et g. En déduis la valeur de v_m à la position d'équilibre.

b) L'expression de la tension T du fil. En déduis la valeur T à l'équilibre.

4. Des oscillations autour de la position d'équilibre, le fil rencontre à 50cm à la vertical passant par O un obstacle C.

a) Décris le mouvement ultérieur du système

b) Trouve la valeur α'_m de l'amplitude d'oscillation g = 10 m/s.

Solution

1. Equation différentielle pendule simple

a) En appliquant la RFD

RFD :

$$\sum \mathscr{M}\vec{F}_{ext}(O) = J\ddot{\alpha}$$

$$\mathscr{M}\vec{P}_{(O)} + \mathscr{M}\vec{R}_{(O)} = J\ddot{\alpha}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}\vec{T}_{(O)} = 0 \\ \mathcal{M}\vec{P}_{(O)} = -mgd = -mgl\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \text{ faible} \Rightarrow \sin\alpha \approx \alpha \text{ rd} \\ J_{(O)} = ml^2 \end{cases} \Rightarrow -mgl\alpha = ml^2\alpha$$

$$-g\alpha = l\ddot{\alpha}$$

$$g\alpha + l\ddot{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\ddot{\alpha} + \dfrac{g}{l}\alpha = 0$ ***Equation différentielle***

b) En appliquant la conservation de l'Em

$$Em = E_P + E_C = Cste \quad \Rightarrow \quad \dot{E}m = \dot{E}_P + \dot{E}_C = 0$$

$$\begin{cases} E_P = \frac{1}{2}mgl\alpha^2 \Rightarrow E_P = mgl\dot{\alpha}\alpha \\ E_C = \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 \Rightarrow E_C = J\ddot{\alpha}\dot{\alpha} \end{cases} \Rightarrow ml^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mgl\alpha\dot{\alpha} = 0$$

$$ml\dot{\alpha}(l\ddot{\alpha} + g\alpha) = 0$$

$$ml\dot{\alpha} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g\alpha + l\ddot{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\ddot{\alpha} + \dfrac{g}{l}\alpha = 0$ ***Equation différentielle***

Déduction

__Nature du mouvement__ :

$\ddot{\alpha} + \dfrac{g}{l}\alpha = 0$ *est de la forme* $\ddot{\alpha} + w_0^2\alpha = 0$ *alors le mouvement est sinusoïdal de pulsation propre* w_0.

Expression et valeurs de :

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + w_0^2\alpha = 0 \\ \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow w_0^2 = \frac{g}{l}$$

- *__La pulsation propre :__* $w_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ (rd/s)
- *__La période propre :__* $T_0 = \dfrac{2\pi}{w_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ (s)
- *__La fréquence propre :__* $N_0 = \dfrac{1}{T_0} \Rightarrow N_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ (Hz)

AN

$w_0 = \sqrt{\frac{10}{1}} \Rightarrow w_0 = 3{,}16 \ (rd/s)$

$T_0 = \frac{2\pi}{3{,}16} \Rightarrow T_0 = 2 \ (s)$

$N_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow N_0 = 0{,}5 \ (Hz)$

2. ***Les équations horaires :***

Une solution de l'équation différentielle est :

$\alpha = \alpha_m \cos(w_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha} = -w_0 \alpha_m \sin(w_0 t + \varphi)$

$$A\ t = 0 \quad \begin{cases} \alpha_0 = \alpha_m \cos\varphi & (1) \\ -\dot{\alpha}_0 = w_0 \alpha_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$$

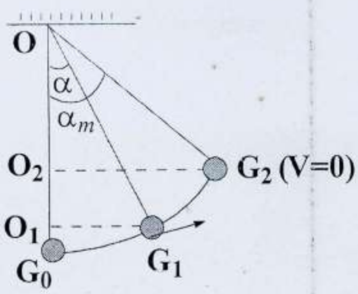
$$A\ t = 0 \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{\pi}{8} rd = 0{,}39 \approx 0{,}4 \\ -\dot{\alpha}_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \alpha_m$$

$(1) \Rightarrow \quad \alpha_m = \alpha_m \cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0$

$\alpha = 0{,}4 \cos 3{,}16t \quad (rd)$

$\dot{\alpha} = -1{,}26 \sin 3{,}16t \quad (rd/s)$

3.a) ***Expression de v en fonction de*** α, α_m, l et g



$$TEC(G_1, G_2) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{G2}^2 - \frac{1}{2} m v_{G1}^2 = -mgh \begin{cases} v_{G2} = 0 \\ v_{G1} = v \\ h = O_2O_1 = OO_1 = l\cos\alpha - l\cos\alpha_m = l(\cos\alpha - \cos\alpha_m) \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} m v_{G1}^2 = -mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_m)$$

$$v_{G1}^2 = 2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_m) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_m)} \quad (m/s)$$

Déduction de v_m

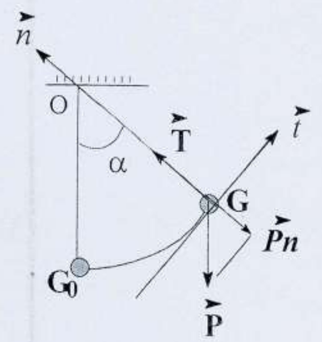
Pour $v = \pm v_m$, $\alpha = 0 \Rightarrow v_m = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_m)} \quad (m/s)$

AN

$$v_m = \sqrt{2\times 10\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$v_m = 1{,}26\ m/s$$

b) Expression de T



RFD suivant $\vec{n}$

$$\sum \vec{F}_{ext}(\vec{n}) = m\vec{a}_n$$

$$T - P_n = m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\frac{v^2}{l} + P_n \quad \Rightarrow \quad T = \frac{m}{l}2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_m) + mg\cos\alpha$$

$$T = 2mg\cos\alpha - 2mg\cos\alpha_m + mg\cos\alpha$$

$$T = 3mg\cos\alpha - 2mg\cos\alpha_m$$

$$T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_m) \quad (N)$$

Valeur de T à la position d'équilibre

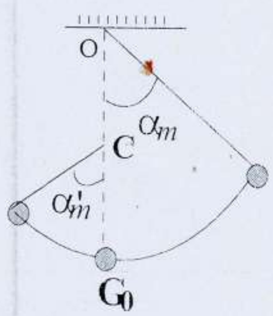
A la position d'équilibre $\alpha = 0$

$$T_e = mg(3 - 2\cos\alpha_m)$$

AN

$$T_e = 2.10^{-2}\times 10\left(3 - 2\cos\frac{\pi}{8}\right) \quad \Leftrightarrow \quad T_e = 0{,}23\ N$$

4.a) Description



$$\begin{cases} E_m = mgl(1-\cos\alpha_m) \\ E'_m = mgl'(1-\cos\alpha'_m) \end{cases}$$

$$E_m = E'_m \quad \Rightarrow \quad l'(1-\cos\alpha'_m) = l(1-\cos\alpha_m)$$

$$l' = \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{2}(1-\cos\alpha'_m) = l(1-\cos\alpha_m)$$

$$1-\cos\alpha'_m = 2(1-\cos\alpha_m)$$

$$1-\cos\alpha'_m = 2-2\cos\alpha_m$$

$$-\cos\alpha'_m = 1-2\cos\alpha_m$$

$$\cos\alpha'_m = 2\cos\alpha_m - 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha'_m = \cos^{-1}(2\cos\alpha_m - 1)$$

$$\alpha'_m = \cos^{-1}\left(2\cos\frac{\pi}{8} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha'_m = 0{,}55\,rd$$

Autre méthode

$$\frac{1}{2}mgl'\alpha'^2_m = \frac{1}{2}mgl\alpha^2_m$$

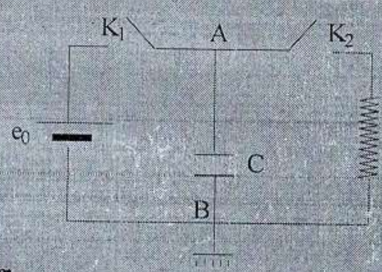
$$\alpha'^2_m = 2\alpha^2_m$$

$$\alpha'_m = \sqrt{2}\alpha_m$$

$$\alpha'_m = \sqrt{2}\times 0{,}39 = 0{,}55\ rd$$

2.5. Déterminer le circuit LC

Application _ 1



$e_0 = 20V$
$C = 1\mu F$; $L = 400mH$

On considère le montage ci - contre

1. Charge et décharge du condensateur

1.1. Charge

L'interrupteur K2 étant ouvert, on ferme K1,

a. Que se passe t – il pour le condensateur ? Justifier.

b. Quelle est l'armature qui se charge positivement.

c. A la fin de la charge

- **Quelle est la tension aux bornes du condensateur.**
- **Quelle est la charge q_0 stockée dans le condensateur. Quelle est l'énergie électrostatique du condensateur.**
- **Quelle est l'intensité du courant dans le circuit.**

1.2. Décharge du condensateur

- Quelle est la charge q_0 stockée dans le condensateur. Quelle est l'énergie électrostatique du condensateur.
- Quelle est l'intensité du courant dans le circuit.

1.2. Décharge du condensateur

On ouvre K1 et à t = 0, on ferme K2

a. Que se passe t – il pour le condensateur.

b. A la fin de la décharge

- Quelle est la tension aux bornes du condensateur
- Quelle est la charge du condensateur
- Quelle est l'énergie électro –statique dans le condensateur
- Quelle est l'intensité du courant dans le circuit
- Quelle est l'énergie magnétique stockée dans la bobine

c. Que ce passe t – il entre la bobine et le condensateur ?

Le condensateur peut – il se déchargé ?

Décris le phénomène observé.

2. Etude des oscillations électriques libres dans un circuit LC série.

2.1. La résistance de la bobine est négligée.

a. Etablis l'équation différentielle du circuit LC en appliquant :

- La loi de l'additivité des tensions
- La conservation de l'énergie totale.

b) En déduis la nature de la charge q ainsi que les expressions et valeur de de w_0, T_0 eN_0

c) Etablis les équations horaires q(t) et i(t).

Montre que i est en quadrature avance sur U.

Trace dans le même repère les variations de q(t) et i(t).

d) Etablis les expressions instantanées des énergies :

- Electrostatique
- Magnétique dans la bobine et électromagnétique total dans le circuit.

Que peut-on dire de l'énergie totale ? Pourquoi.

e) Le circuit LC oscille t – il dans un puits de potentiel parabolique ? Pourquoi.

2.2. La résistance de la bobine est non négligée.

a) Quel est le rôle de R.

b) Etablis l'équation différentielle du circuit LC amorti.

c) Discute en fonction des valeurs R de la nature de la charge q.

d) Trace dans le cas de R faible, l'allure de la courbe.

Que peut – on dire de la pseudo – période.

e) Calcule l'énergie dissipée dans le circuit par effet joule pour R = 10Ω.

Solution

1.

1.1. Charge du condensateur

a) *Le condensateur se charge : les électrons se déplacent de A vers B.*

b) *L'armature A, relié au pôle + du générateur se charge positivement.*

c) *A la fin de la charge :*

- *La tension aux bornes du condensateur est* $U_0 = e_0 = 20V$
- *La charge du condensateur* $q_0 = CU_0 = 10^{-6} \times 20 = 2.10^{-5}\ C$
- *L'énergie électrostatique stockée dans le condensateur est :* $E_0 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(2.10^{-5})^2}{10^{-6}} = 2.10^{-4}J$
- *L'intensité du courant dans le circuit :* $I_0 = 0$.

1.2. Décharge du condensateur

a) *Le condensateur se décharge dans la bobine. Il y a retour des électrons de B vers A.*

b) *A la fin de la décharge :*

- *La tension aux bornes du condensateur est nulle.*
- *La charge est nulle*
- *L'énergie électrostatique est nulle*
- *L'intensité du courant dans le circuit est :* $|i| = I_m$
- *L'énergie magnétique dans la bobine est :* $Em = \frac{1}{2}LI^2_{\max i} = \frac{1}{2}CU_0^2 = 2.10^{-4}J$

c) *Toute l'énergie électrostatique du condensateur s'est transformée en énergie magnétique dans la bobine.*

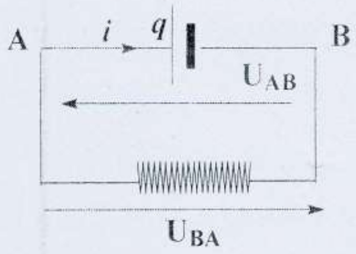
La bobine peut à son tour se déchargée dans le condensateur et le condensateur peut ensuite charger la bobine et ainsi de suite ; il y a échange mutuelle d'énergie entre le condensateur et la bobine : c'est le phénomène d'oscillation électrique libre.

2. Etude du mouvement

2.1. Résistance de la bobine est négligée

a) Equation différentielle du circuit LC

- *<u>En appliquant la loi des mailles</u>*



Loi des mailles : $U_{AB} + U_{BA} = 0$

$U_C + U_L = 0$

$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$

$$\begin{cases} i = +\frac{dq}{dt} = \dot{q} \\ \frac{di}{dt} = \ddot{q} \end{cases} \Rightarrow \frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0$$

$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ **Equation différentielle**

- *En appliquant la conservation de l'énergie*

$E_T = E_C + E_m = Cste \Rightarrow \dot{E}_T = \dot{E}_C + \dot{E}_m = 0$

$$\begin{cases} E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow \dot{E}_C = \frac{1}{C}\dot{q}q \\ E_m = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow \dot{E}_m = L\ddot{q}\dot{q} \end{cases}$$

$\dot{E}_T = 0 \Rightarrow L\ddot{q}\dot{q} + \frac{1}{C}\dot{q}q = 0$

$\dot{q}\left(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q\right) = 0$

$\dot{q} \neq 0 \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$

$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ **Equation différentielle**

Déduction

- *Nature du mouvement q(t) :*

$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ *est de la forme* $\ddot{q} + w_0^2 q = 0 \Rightarrow$ *q est sinusoïdal de pulsation* w_0.

- *Expression et valeur de w_0, T_0 et N_0.*

$$\begin{cases} \ddot{q} + w_0^2 q = 0 \\ \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \end{cases} \Rightarrow w_0^2 = \frac{1}{LC}$$

- *Pulsation propre :* $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ (rd/s)$; $AN : w_0 = 1581\ (rd/s)$

- *Période propre :* $T_0 = \frac{2\pi}{w_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}\ (s)$; $AN : T_0 = 4.10^{-3} s$

- *Fréquence propre :* $N_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\ (Hz)$; $AN : N_0 = 250\ Hz$

c) Les équations horaires q(t) et i(t)

Une solution de l'équation différentielle est :

$q = q_m \cos(w_0 t + \varphi) \Rightarrow i = \dot{q} = -w_0 \alpha_m \sin(w_0 t + \varphi)$

$A t = 0 \begin{cases} q_0 = q_m \cos\varphi & (1) \\ \dot{q}_0 = -w_0 q_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$

$A t = 0 \begin{cases} q_0 = 2.10^{-5} C \\ i_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_0 = q_m$

$(1) \Rightarrow q_m = q_m \cos\varphi \Leftrightarrow \varphi = 0$

$q = 2.10^{-5} \cos 1581t\ (C)$

$i = -3{,}16.10^{-2} \sin 1581t\ (A)$

Démonstration

$q = q_m \cos w_0 t$

$i = \dot{q} = -I_m \sin w_0 t$

$-\sin w_0 t = \cos\left(w_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow i = I_m \cos\left(w_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

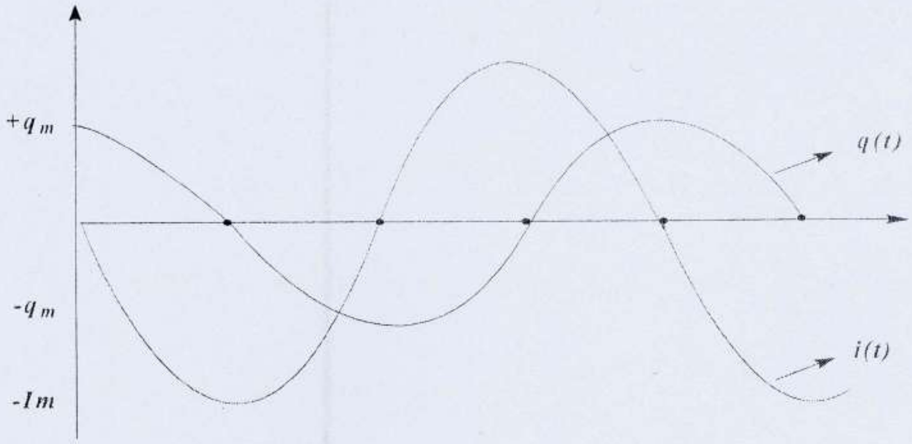
$q = CU \Rightarrow$ *q et U sont en quadrature de phase.*

$\varphi_{i/q} = \varphi_i - \varphi_q = w_0 t + \frac{\pi}{2} - w_0 t = \frac{\pi}{2}$

$\varphi_{i/q} = \frac{\pi}{2}$ *rd alors* ***i*** *est en quadrature avance sur* ***q*** *donc sur* ***u***

Graphe de q(t) et i(t)

t(s)	0	$T_0/4$	$T_0/2$	$3T_0/4$	T_0	$5T_0/4$
q(t)	q_m	0	$-q_m$	0	q_m	0
i(A)	0	$-I_m$	0	I_m	0	$-I_m$



d) Les énergies

- Energie électrostatique dans le condensateur

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}\cos^2 w_0 t$$

- Energie dans la bobine

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2 \quad \Rightarrow \quad E_m = Lw_0^2 q_m^2 \sin^2 w_0 t$$

$$w_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad E_m = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}\sin^2 w_0 t$$

- Electromagnétique dans le circuit

$$E_T = E_C + E_m \quad \Rightarrow \quad E_T = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C} = Cste$$

Il y a transformation mutuelle entre E_l et E_C.

e) Le circuit LC oscille dans un puits de potentiel parabolique car le graphe E_c est une parabole.

2.2. Circuit LC amorti $(R \neq 0)$

a) R joue le rôle d'amortisseur

b) Equation différentielle

Loi des mailles : $U_{AB} + U_{BA} = 0$

$$\begin{cases} U_{AB} = U_C = \dfrac{q}{C} \\ U_{BA} = U_R + U_L = Ri + L\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{q}{C} + Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

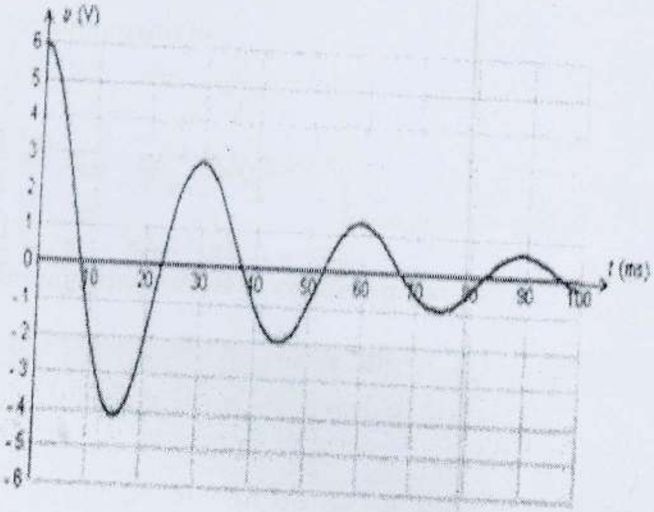
$$\begin{cases} i = \dot{q} \\ \dfrac{di}{dt} = \ddot{q} \end{cases} \Rightarrow \frac{q}{C} + R\dot{q} + L\ddot{q} = 0$$

$\ddot{q} + \dfrac{R}{L}\dot{q} + \dfrac{1}{LC}q = 0$ ***Equation différentielle***

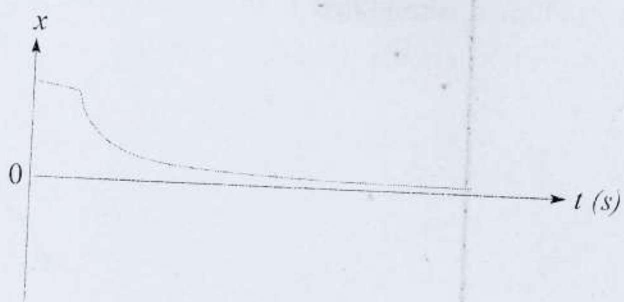
Cette équation est non linéaire, il y a amortissement à cause de R.

c) ***Discutions***

R faible $\Rightarrow$ ***Régime pseudopériodique.***



R elevée $\Rightarrow$ ***Régime apériodique.***



a pseudo période est égale à la vraie période $T_0' = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

Energie dissipée

$= \dfrac{1}{2} R I_m^2 t$

N :

$R = 10\Omega$

$I_m = 3{,}16.10^{-2}\,A \quad Q = 5.10^{-5}\ (J)$

$= 10^{-2}\,s$

3. Analogies entre grandeurs électrique et grandeurs mécaniques

Equation différentielle :

- *d'un circuit (LC) :* $L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
- *d'un pendule élastique :* $m\ddot{x} + kx = 0$

D'après ces deux équations, on constate une analogie formelle entre les grandeurs électriques d'un circuit (LC) et mécaniques d'un pendule élastique.

$L \Rightarrow m$

$\frac{1}{C}(capacitance) \Rightarrow k$

$q \Rightarrow x$

$\dot{q} = i \Rightarrow v$

$R \Rightarrow \alpha$ (coeff. de frottement)

$U_r = \frac{q}{C} \Rightarrow T = kx\ (N)$

$E_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow E_P = \frac{1}{2}kx^2$

$E_m = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}mv^2$

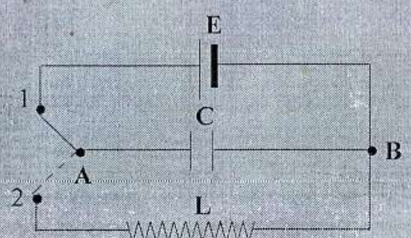
$E_T = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$

Application _ 2

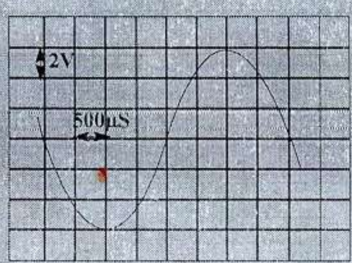
Exploitation d'oscillogramme

On un condensateur de capacité C = 0,8µF à l'aide d'un générateur de f.é.m. e_0 au moyen du circuit représenté à la figure a lorsque l'interrupteur est dans la position 1.
On décharge ensuite dans une bobine d'inductance L et de résistance négligeable en basculant l'interrupteur en 2. On visualise la tension aux bornes du condensateur (fig. b)

a)



b)



a. **Quelle est la charge maximale du condensateur ?**
b. **Quelle est l'énergie maximale emmagasinée par le condensateur ?**
c. **Etablis une relation entre la charge q du condensateur, $\ddot{q}$, L et C.**

d. **Quelle est la valeur de l'inductance L de la bobine ?**

e. **Quelle est la valeur de l'intensité maximale du courant ?**

f. **Comment serait modifié le chronogramme si l'inductance de la bobine avait été divisée par 4 ?**

g. **Comment serait modifié le chronogramme si la résistance du circuit n'était plus négligeable ?**

Donnée : C = 0,8µF

Solution

a) La charge maximale du condensateur

$q = CU \quad \Rightarrow \quad q_{\max i} = CU_{\max i}$

$$AN : \begin{cases} C = 0{,}8\mu F = 0{,}8.10^{-6} F \\ U_{\max i} = 3 \times 2 = 6V \end{cases} \Rightarrow \quad q_{\max i} = 0{,}8.10^{-6} \times 6 \quad \Rightarrow \quad q_{\max i} = 4{,}8.10^{-6}\, C$$

b) L'énergie maximale emmagasinée dans le condensateur

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{q_{\max i}^2}{C}$$

$$AN : \begin{cases} q_{\max i} = 4{,}8.10^{-6}\, C \\ C = 0{,}8.10^{-6}\, F \end{cases} \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2} \times \frac{\left(4{,}8.10^{-6}\right)^2}{0{,}8.10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad E_C = 1{,}44.10^{-5}\, J$$

c) Etablissons la relation entre q du condensateur $\ddot{q}$, L et C

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$q = CU \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = C\ddot{U}$$

$$C\ddot{U} + \frac{1}{LC} CU = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{U} + \frac{1}{LC} U = 0$$

d) Valeur de L

$$w_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad LCw_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{Cw_0^2} \; avec \; w_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$$

$$AN : \begin{cases} T_0 = \tau \times s = 8 \times 500.10^{-6} = 4.10^{-3} s \\ C = 0{,}8.10^{-6}\, F \end{cases} \Rightarrow \quad L = \frac{16.10^{-6}}{40 \times 8.10^{-7}} \quad \Rightarrow \quad L = 0{,}5\, H$$

e) La valeur de I_{maxi}

$$I_{\max i} = w_0 q_m$$

$$I_{\max i} = \frac{2\pi}{4.10^{-3}} \times 4{,}8.10^{-6} \quad \Rightarrow \quad I_m = 7{,}54.10^{-3}\, A$$

f) Modification du chronogramme

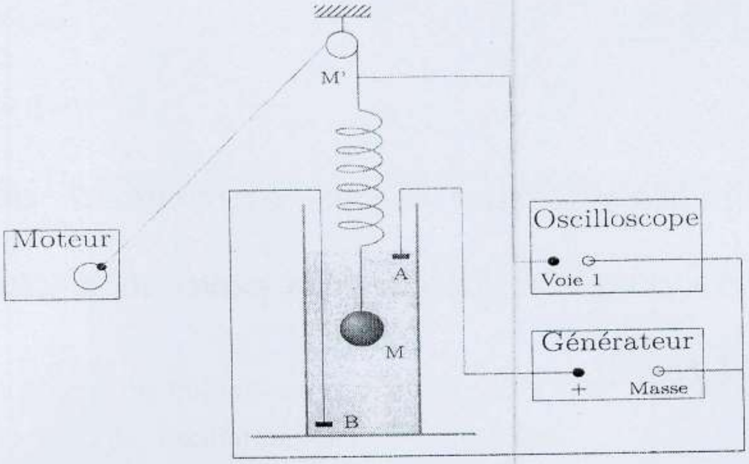
$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

$T_0^{'} = 2\pi\sqrt{L'C}$ *avec* $L' = \dfrac{L}{4} \Rightarrow T_0^{'} = 2\pi\sqrt{\dfrac{LC}{4}} = \dfrac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{LC}\right)$

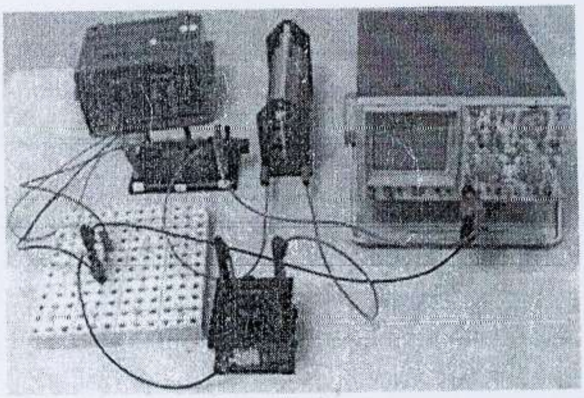
$T_0^{'} = \dfrac{1}{2}T_0$

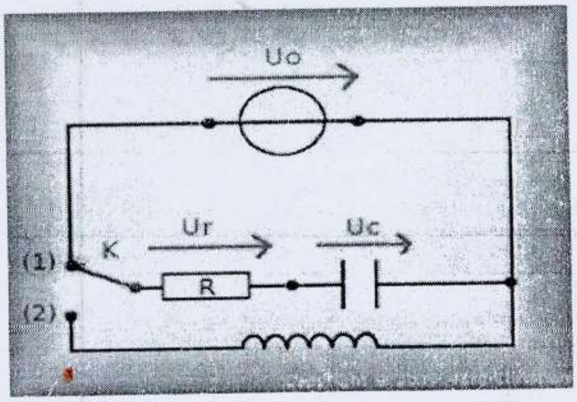
g) R est non négligée

R faible $\Rightarrow$ *le chronogramme ne serait pas modifiée car* $T_0^{''} = T_0$



OSCILLATIONS FORCEES





Situation problème :

Dans un documentaire, deux élèves apprennent qu'il existe des oscillations forcées. Le présentateur leur parle de circuit (RL C) et de régime sinusoïdal forcé.

Les élèves veulent comprendre le comment et le pourquoi.

Ils veulent apprendre à établir l'équation différentielle, l'expression de la tension aux bornes du circuit.

Les élèves veulent s'approprier les notions de résonance et de surtension.

1. Ce qu'il faut savoir

1.1. Les définitions générales

- **Oscillations forcées :** Un système est en oscillation forcée lorsqu'il oscille avec une fréquence qui lui est imposée.
- **Un oscillateur forcé :** Est un système qui oscille avec une fréquence différente de sa fréquence propre.
- **Un excitateur** : Est un système qui impose sa fréquence à un autre.

Exemple : Le GBF dans le cas des oscillations électriques forcées.

- **Un résonateur** : Est un système qui répond à une excitation.

Exemple : Le circuit RLC dans le cas des oscillations électriques forcées.

Un résonateur peut être amorti ou sélectif.

- **Un résonateur sélectif :** Est un résonateur qui entre en résonance sur une faible bande de fréquence.

Exemple : Le pont des Martyrs, le stade du 26 mars, une salle de cinéma, un multimètre.

- **Un résonateur amorti :** Est un résonateur qui entre à la résonance sur une large bande de fréquence.

Exemple : L'œil, le tympan de l'oreille, un haut-parleur, le microphone.

- **La résonance :** Est lorsque la fréquence imposée par l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur ; dans ce cas la réponse du résonateur est maximale.
- **La résonance mécanique :** La résonance mécanique est lorsque l'élongation maximale α_m du résonateur est la plus grande.
- **La résonance d'intensité :** Est lorsque la fréquence du courant est égale à la fréquence propre du circuit.

Caractéristiques de la résonance d'intensité : A la résonance d'intensité :

- La fréquence du courant est égale à la fréquence propre du circuit : $f = f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.
- La tension et l'intensité sont en phase : $\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi = 1 \;\Leftrightarrow\; LCw_0^2 = 1$
- L'impédance du circuit est minimale : $Z = Z_{min} = R$
- L'intensité efficace du courant est maximale : $I = I_0 = \dfrac{U}{R}$
- La puissance consommée est maximale : $P = P_0 = UI_0 = RI_0^2$

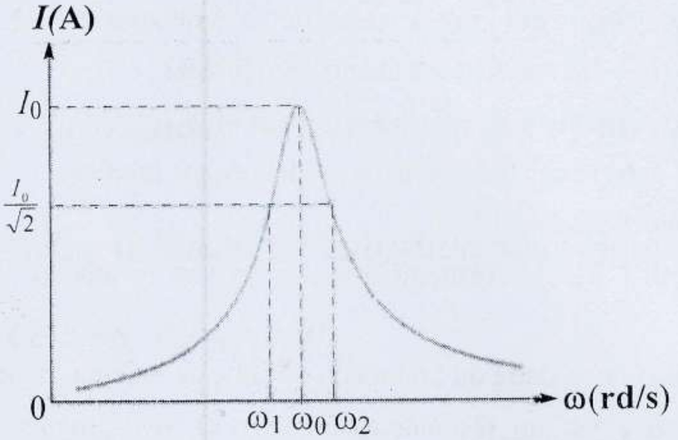
- **La bande passante à 3 décibels (3db) :** Est l'ensemble des pulsations pour lesquelles la réponse du résonateur est supérieure ou égale ($\geq$) à la réponse maximale divisée par $\sqrt{2}$.

En électricité : La bande passante à 3db est l'ensemble des pulsations pour lesquelles l'intensité efficace du courant est supérieure ou égale (≥) à l'intensité efficace maximale divisée par $\sqrt{2}$.

w_2 *et* w_2 sont les limites de la bande passante : $I(w_1) = I(w_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

La largeur de la bande passante est $\Delta w = w_2 - w_1$ ou $\Delta w = \frac{R}{L}$ (rd/s)

On a $w = 2\pi N \Rightarrow \Delta w = 2\pi \Delta N$



- **Le coefficient de sélectivité :** Est le quotient de la pulsation propre par la largeur de la bande passante.

$$Q = \frac{w_0}{\Delta w}$$

En électricité : Le coefficient de sélectivité est appelé facteur de qualité ou coefficient de surtension.

$$Q = \frac{w_0}{\frac{R}{L}} \Rightarrow Q = \frac{Lw_0}{R} = \frac{1}{RCw_0} = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}$$

1.2. Définition relatives aux oscillations électriques forcées.

- **Oscillations électriques forcées :** Un circuit est en oscillation forcée lorsqu'il y circule un courant dont la fréquence est différente de sa fréquence propre.
- **Un dipôle :** Est tout composant électrique ayant deux pôles.
- **Le courant alternatif sinusoïdal :**

- Définition : Est un courant dont la tension et l'intensité sont des fonctions sinusoïdales du temps.

$i = I_m \cos(wt + \varphi_1)$

$u = U_m \cos(wt + \varphi_1)$

- L'amplitude de la tension : Est valeur maximale Um de la tension
- L'intensité efficace : Est la valeur I du courant alternatif ayant même effet joule qu'un courant de

même valeur $I_{eff} = I_e = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ (A)

- <u>La tension efficace :</u> Est la valeur U de la tension alternative ayant même joule qu'une tension continue de même : $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad U_m = U\sqrt{2}$ (V)

<u>NB :</u>

(1) <u>Les appareils de mesure indiquent les valeurs efficaces :</u>

* l'ampèremètre indique I $\left(-(A)- \quad \Rightarrow \quad I\right)$

* le voltmètre indique U_{eff}

* le wattmètre indique P (puissance moyenne)

(2) <u>Les effets du courant alternatif sont :</u>

L'effet calorifique, l'effet chimique et l'effet magnétique.

- <u>Le déphasage :</u> Est la différence de phase φ entre la tension et l'intensité $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

NB : Lorsque $\varphi > 0$, la tension est en avance sur l'intensité.

Exemple : $\varphi = \frac{\pi}{2}$ la tension est en quadrature avance sur l'intensité (self)

Lorsque $\varphi < 0$, la tension est en retard sur l'intensité.

- <u>Détermination</u>

* <u>Par calcul</u>

Pour un circuit (RLC)

$$\tan\varphi = \frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R}\right) \quad (rd)$$

$$\tan\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{U_R}{U}$$

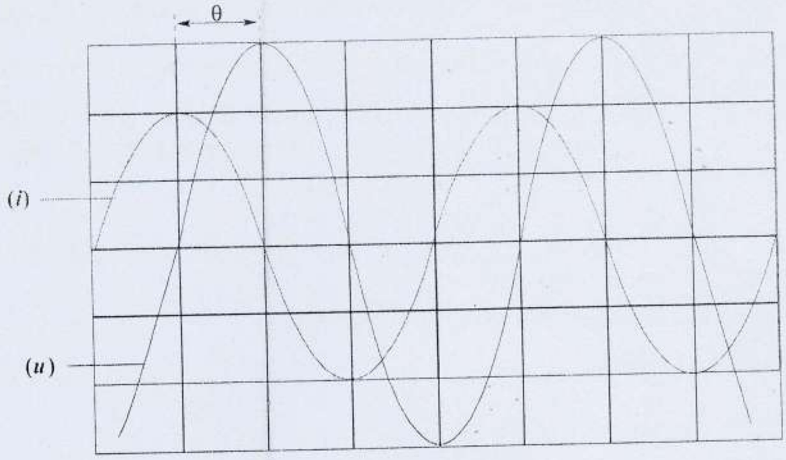
* <u>A partir des graphes</u>

$$|\varphi| = w\theta$$

$$|\varphi| = \frac{2\pi}{T}\theta$$

$$\varphi \succ 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{T}\theta$$

$$\begin{cases} T \Rightarrow \mathscr{L} \\ \theta \Rightarrow \ell \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{\mathscr{L}}\ell$$



- **L'impédance d'un circuit :** Est le quotient Z de la tension maximale par l'intensité maximale :

$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$ (Ω)

Pour un circuit RLC : $Z = \sqrt{R^2 + \left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)^2}$ (Ω)

- **La réactance :** $X = Lw - \frac{1}{Cw}$

$X = X_L - X_C$

$X_L \succ X_C$: L'effet self emporte sur l'effet de capacité.

$X_C \succ X_L$: L'effet de capacité emporte sur l'effet self.

- **La puissance :**

- Puissance moyenne : Est le produit de la puissance apparente UI par le facteur de puissance.

$P = UI\cos\varphi$ (Watts).

- Le facteur de puissance :

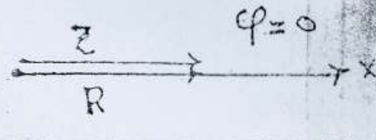
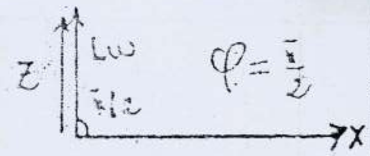
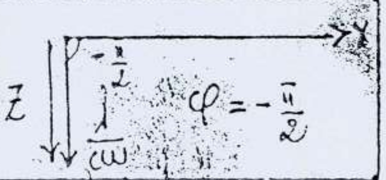
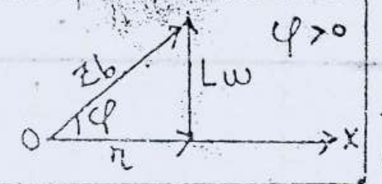
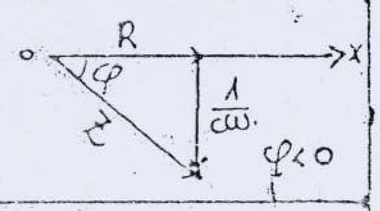
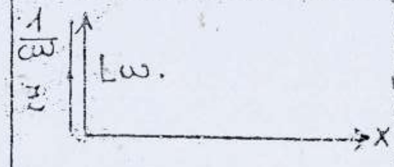
  * Définition : C'est le cosinus du déphasage tension courant

  * Son rôle : Le facteur de puissance possède un important rôle économique. Lorsque le facteur de puissance d'une installation est faible, cela entraine des pertes d'énergie dans les lignes engendrant d'énormes pertes économiques pour la société EDM.

En effet, la puissance produite par EDM est S = UI, la puissance facturée est $P = UI\cos\varphi$, lorsque le $\cos\varphi$ d'une installation est faible la majeur partie de la puissance fournie demeure non facturée ; cela entraine des préjudices économiques pour EDM.

- La puissance apparente : Est le produit de la tension efficace par l'intensité efficace. $S = UI$ (V.A)
- La puissance instantanée : Est le produit de la tension instantanée et l'intensité instantanée.

$P = UI$ (Watts).

dipôles	$P = UI\cos\varphi$	CONTINU	Impédances (Ω)	déphasages (rd)	diagramme de Fresnel
R — ésistor (Resistance	$P = RI^2$.	$U_c = RI_c \rightarrow \boxed{R = \frac{U_c}{I_c}}$ sans retard.	$Z_R = R$	$\varphi = 0 \longrightarrow \cos\varphi = 1$ $(R = Z)$	
L — Self pure	$R_L = 0$	$I = \infty$; car $r \simeq 0$ Court circuit	$\boxed{Z_L = L\omega}$ (Ω) $\omega = 2\pi f$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$; u est en quadrature avance sur i.	
C — Condo	$P_c = 0$	$I = 0$; (arrête le c.c à cause de C).	$\boxed{Z_C = \frac{1}{C\omega}}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$; u est en quad. retard sur i.	
r, L — Bobine	$P = rI^2$.	$\boxed{r = \frac{U_c}{I_c}}$ avec retard.	$Z_b = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$ $L = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z_b^2 - r^2}$	$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{r}\right) > 0$ u est en avance sur i	
R, C — (R, c)	$P = RI^2$.	$I_c \simeq 0$ à cause de C.	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$ $C = \frac{1}{\omega\sqrt{Z^2 - R^2}}$	$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{RC\omega}\right) < 0$ i est en avance sur u	
L, C — (L, c)	$P = 0$	$I_c = 0$ à cause de C.	$Z = \left\lvert L\omega - \frac{1}{C\omega} \right\rvert$	$\varphi = \pm \pi/2$	
R, L, C — (R, L, C)	$P = RI^2$	$I_c = 0$ à cause de C.	$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$	$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$	(V. C)
R, r, L, C	$P = (R+r)I^2$	$I_c = 0$ à cause	$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$	$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}\right)$	

2. Ce qu'il faut savoir faire

2.1. Déterminer un circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

Application _ 1

On considère un conducteur ohmique de résistance R = 50 Ω, une bobine d'inductance L = 0,02H et de résistance négligeable et un condensateur de capacité C = 20µF montés en série aux bornes d'un GBF de tension 220V et de fréquence 50 Hz.

1. a) Fais un schéma du montage.

b) Calcule la fréquence propre du circuit ; compare là à celle du courant. Conclus.

c) Quelle est la tension aux bornes du dipôle RLC.

2. Etude du dipôle en régime sinusoïdal forcé :

2.1. Etablis l'expression de la tension aux bornes du circuit RLC.

2.2. a) Fais le diagramme de Fresnel

b) En déduis :

*** L'expression de l'impédance du circuit**

*** Le déphasage φ**

2.3. Application numérique : Calcule :

a) L'impédance du circuit

b) L'intensité efficace du courant

c) Le déphasage φ

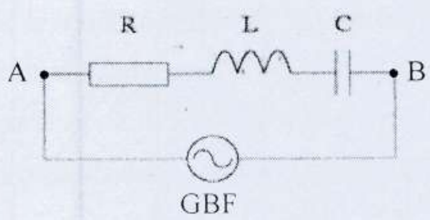
d) La puissance consommée par le dipôle

2.4. Exprime la tension u(t) aux bornes du dipôle

2.5. Pour quelle fréquence la tension et l'intensité sont-elles en phases. Calcul alors I_{eff} et la puissance du circuit. On donne : $i = I_m \cos wt$

Solution

1.a) Un schéma du montage



*b) **La fréquence du circuit***

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$AN : \begin{cases} L = 2.10^{-2}\,H \\ C = 20\mu F = 2.10^{-5}\,F \end{cases} \Rightarrow \quad f_0 = 251{,}77\ Hz$$

Comparons

$$\begin{cases} f = 50\ Hz \\ f_0 = 251{,}77\ Hz \end{cases} \Rightarrow \quad f_0 \approx 5f$$

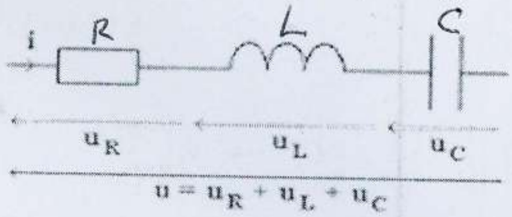
Conclusion : *Le circuit est en oscillations électriques forcées*

c) La tension aux bornes du dipôle

Elle est égale à la tension aux bornes de GBF $\Rightarrow u = 220V$

2. Etude du dipôle en régime forcé

2.1. Expression de la tension aux bornes du circuit (RLC) en régime sinusoïdal forcé



Loi de l'additivité

$$u = u_R + u_L + u_C$$

$$= Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \quad q = \int_0^t i\,dt$$

L'équation du circuit est : $u = Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i\,dt$

$$Soit \begin{cases} i = I_m \cos wt \\ u = U_m \cos(wt + \varphi) \end{cases}$$

$$u = RI_m \cos wt - LwI_m \sin wt + \frac{I_m}{Cw} \sin wt$$

$$\begin{cases} -\sin wt = \cos\left(wt + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin wt = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - wt\right) = \cos\left(wt - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

D'où l'expression de la tension aux bornes du dipôle est :

$$U_m \cos(wt + \varphi) = RI_m \cos wt + LwI_m \cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{Cw}\cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) \quad (V)$$

NB : Tension aux bornes:

* *du résistor* : $u_R = RI_m \cos wt$

* *de la bobine :* $u_L = LwI_m \cos\left(wt + \dfrac{\pi}{2}\right)$

* *du condensateur* : $u_C = \dfrac{I_m}{Cw}\cos\left(wt - \dfrac{\pi}{2}\right)$

2.2. Diagramme de Fresnel

Soit ox l'axe des phases

$U_R \mapsto \vec{v}_1 \left| \begin{matrix} 0 \\ R \end{matrix} \right.$; $U_L \mapsto \vec{v}_2 \left| \begin{matrix} \pi/2 \\ Lw \end{matrix} \right.$; $U_C \mapsto \vec{v}_3 \left| \begin{matrix} -\pi/2 \\ 1/Cw \end{matrix} \right.$; $U \mapsto \vec{v} \left| \begin{matrix} \varphi \\ Z \end{matrix} \right.$

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

$\left| Lw = 6{,}28\Omega \right.$; $\dfrac{1}{Cw} = 159{,}23\Omega$; $Lw - \dfrac{1}{Cw} = -152{,}95\Omega$

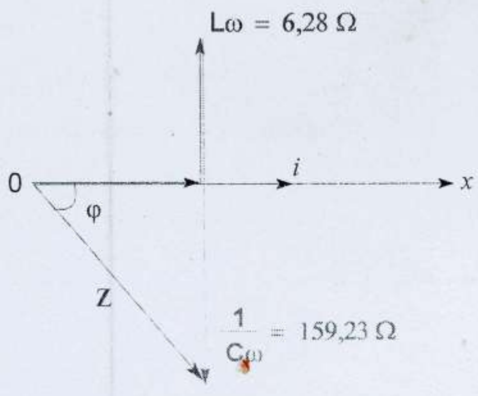


Diagramme de Fresnel

b) Déduction :

* *L'expression de l'impédance :* $Z^2 = R^2 + \left(Lw - \dfrac{1}{Cw}\right)^2$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)^2}$$

* *Le déphasage*

$$\tan\varphi = \frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R}\right)$$

2.3. AN

a) Valeur de Z

$$Z = \sqrt{50^2 + (152{,}95)^2} \Rightarrow Z = 160{,}92\,\Omega$$

b) Intensité efficace

$$I = \frac{U}{Z} \Rightarrow I = \frac{220}{160{,}92} \Rightarrow I = 1{,}36\,A$$

c) Déphasage

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R}\right) \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-152{,}95}{50}\right) \Rightarrow \varphi = -1{,}25\,rd$$

i est en avance sur u de 1,25 rd.

d) La puissance consommée

$$P = RI^2$$

$$P = 50 \times (1{,}36)^2 \Rightarrow P = 92{,}48\,Watts$$

2.4. Expression de u(t)

$$u = U_m \cos(wt + \varphi)$$

$$u = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t - 1{,}25) \quad (V)$$

2.5. La fréquence à la résonance

$$f = f_0 = 251{,}77\,Hz$$

L'intensité I_0

$$I_0 = \frac{U}{R} \Rightarrow I_0 = \frac{220}{50} \Rightarrow I_0 = 4{,}4\,A$$

La puissance à la résonance

$$P_0 = RI_0^2$$

$$P_0 = 50 \times (4{,}4)^2 \quad \Rightarrow \quad P = 968\,Watts$$

Application _ 2

Détermination de la nature du dipôle

On considère trois dipôles : un conducteur ohmique de résistance R, un condensateur de capacité C, une bobine de résistance r et d'inductance L, enfermés dans trois boîtes différentes.

1. On branche successivement ces trois dipôles sur une alimentation continue délivrant une tension de 12 V. On mesure l'intensité du courant (en régime permanent). On obtient :

- **pour la boîte 1, $I_1 = 0$;**
- **pour les boîtes 2 et 3, $I_2 = I_3 = 240\ mA$.**

Quelles sont les conclusions que l'on peut tirer de ces résultats.

2. On branche successivement ces trois dipôles sur une alimentation alternative délivrant une tension efficace de 24 V de fréquence 50 Hz.

On mesure l'intensité efficace du courant traversant chaque dipôle. On obtient :

- **pour la boîte 1, $I_1 = 75\ mA$**
- **pour la boîte 1$_2$ $I_2 = 480\ mA$**
- **pour la boîte 1$_3$ $I_3 = 406\ mA$**

a) Calcule les impédances des trois dipôles.

b) Précise le contenu de chacune des boîtes. Détermine les valeurs de L et C.

3. On monte ces trois dipôles en série. On alimente ce circuit (RLC) en courant alternatif de tension efficace 24 V et de fréquence variable.

a) Pour quelle fréquence l'intensité et la tension seront – elles en phase ?

b) Quelle est alors l'intensité efficace du courant ?

Solution

1- Conclusions

* $I_1 = 0$ *la boîte (1) contient le condensateur*

Boites (2) et (3)

$$\begin{cases} R = \dfrac{U}{I_2} \\ r = \dfrac{U}{I_3} \end{cases} \Rightarrow I_2 = I_3 \quad \Leftrightarrow \quad R = r = \frac{12}{0{,}24} = 50\Omega$$

$R = r = 50\Omega$

2- a) Impédances des dipôles

$$Z = \frac{U}{I}$$

Pour la boîte (1)

$$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{24}{75.10^{-3}} = 320\Omega \quad \Rightarrow \quad Z_1 = 320\Omega$$

Pour la boîte (2)

$$Z_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{24}{0{,}48} = 50\Omega \quad \Rightarrow \quad Z_2 = 50\Omega$$

Pour la boîte (3)

$$Z_3 = \frac{U}{I_1} = \frac{24}{0.406} = 59{,}11\Omega \quad \Rightarrow \quad Z_3 = 59{,}11\Omega$$

b) Contenu de chacune des boîtes

- boîte (1) contient le condensateur
- boîte (2) contient le résistor car $Z = R$
- boîte (3) contient la bobine

Déterminons L et C

Pour la boîte (1) :

$$Z_1 = \frac{1}{Cw} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{Z_1 w}$$

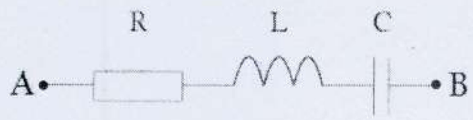
$$AN : \begin{cases} Z_1 = 320\Omega \\ w = 314 rd/s \end{cases} \Rightarrow \quad C = 9{,}95.10^{-6}\,F$$

Pour la boîte (3)

$$Z_3^2 = r^2 + (Lw)^2 \quad \Rightarrow \quad (Lw)^2 = Z_3^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{w}\sqrt{Z_3^2 - r^2} \quad (H)$$

$$AN : \begin{cases} Z_3 = 59{,}11\Omega \\ w = 314 rd/s \\ r = 50\Omega \end{cases} \Rightarrow \quad L = 0{,}1H$$

3. Les dipôles 1, 2, 3 en série



a) Impédance de l'ensemble

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)^2}$$

$$\begin{cases} R = r = 50\ \Omega \\ w = 314\, rd/s \\ Lw - \dfrac{1}{Cw} = -288{,}6\,\Omega \end{cases} \Rightarrow \quad Z = 305{,}43\,\Omega$$

b) Intensité efficace

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{24}{305{,}43} = 0{,}078\,A \quad \Rightarrow \quad I = 0{,}078\ A$$

c) Fréquence à la résonance

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = 159{,}55\,Hz$$

- L'intensité efficace du courant

$$I_0 = \frac{U}{(R+r)} = \frac{24}{100} = 0{,}24\,A \quad \Rightarrow \quad I_0 = 0{,}24\ A$$

Application _ 3

Détermination de la nature du dipôle

Le circuit représenté sur la figure a est branché aux bornes d'un générateur délivrant une tension alternative sinusoïdale u de pulsation ω.

- **La tension u est représentée sur l'écran d'un oscillographe (voie Y_A).**
- **La tension u1, proportionnelle à l'intensité i du courant électrique est également représentée sur cet écran (voie YB).**
- **Les caractéristiques de l'oscillographe sont :**

Voie YA : gain 2V.cm^{-1}.

Voie YB : gain 0,25 V

Balayage : 2 $ms.cm^{-1}$.

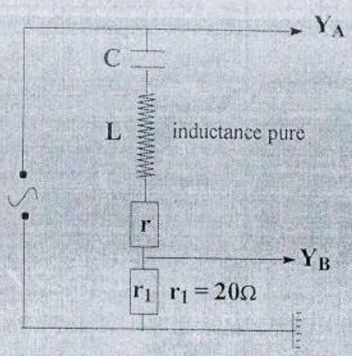


Figure a

1. On observe sur l'écran les courbes de la figure b. Définis l'état particulier dans lequel se trouve le circuit et précise ses caractéristiques électriques.

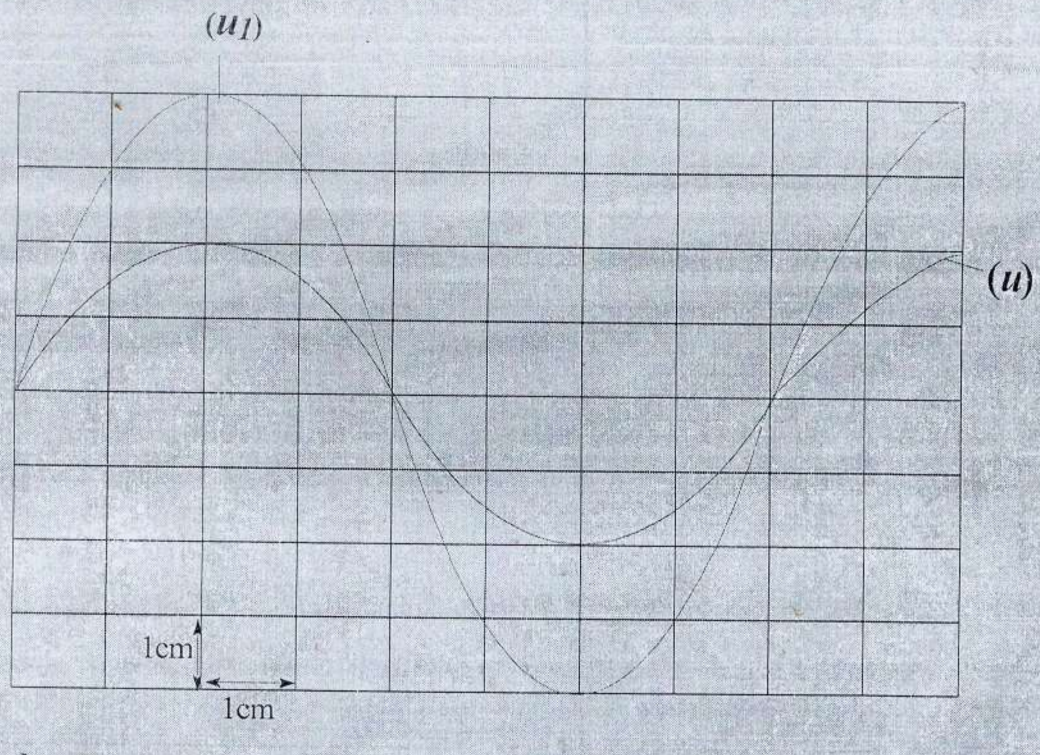


Figure b

Décris les valeur des grandeurs suivantes :

a) période T,

b) pulsation ω,

c) résistance $R = r + r_1$.

2. La bobine d'auto - inductance L et de résistance ohmique nulle est remplacée par un fil droit de résistance ohmique nulle.

On observe sur l'écarn les courbes de la figure c.

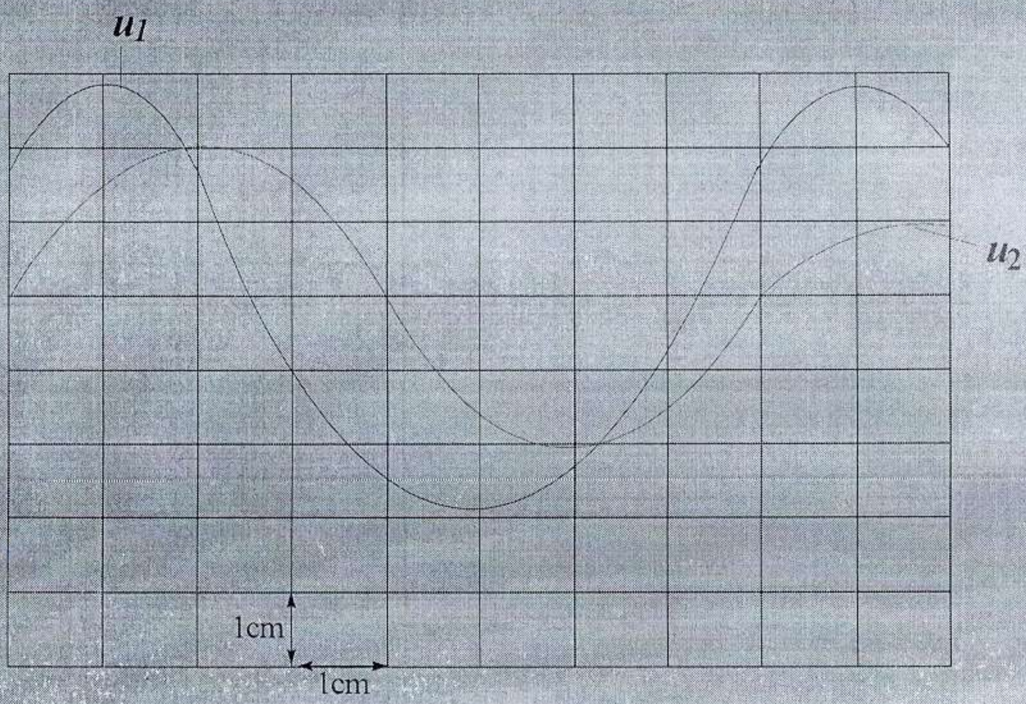
Déduis les résultats suivants :

a) capacité C,

b) l'auto – inductance L du premier circuit.

Précise l'état du circuit : évalue le sens et la valeur du déphasage.

Figure c



Solution

1. L'état particulier est la résonance d'intensité (i et u sont en phase)

Caractéristiques :

$$\begin{cases} f = f_0 \\ \varphi = 0 \\ Z = R \end{cases}$$

Déduction

a) La période : $T = \mathscr{L} \times s$

$$AN : \begin{cases} \mathscr{L} = 8cm \\ s = 2ms/cm \end{cases} \Rightarrow T = 16ms \Leftrightarrow T = 16.10^{-3}s$$

b) La pulsation : $w = \dfrac{2\pi}{T}$

$$w = \frac{2\pi}{16.10^{-3}} \Rightarrow w = 392{,}7\ rd/s$$

c) La résistance R

A la résonance : $Z = R = \dfrac{U}{I_0} = \dfrac{U_m}{I_{0m}}$

Recherche de U_m et I_{0m}

$U_m = k \times d$

$$\begin{cases} k = 2Vcm^{-1} \\ d = 2cm \end{cases} \Rightarrow U_m = 4V$$

$U_m = k_1 \times d_1 = 0{,}25 \times 4 = 1V$

$R = \dfrac{4}{0{,}05} \Rightarrow R = 80\Omega$

2. **Déduction**

a) **La capacité C**

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{Cw}\right)^2}$$

$$Z^2 = R^2 + \left(\frac{1}{Cw}\right)^2$$

$$C = \frac{1}{w\sqrt{Z^2 - R^2}} \quad (F)$$

$$AN : \begin{cases} w = 392{,}7\,rd/s \\ U_m = 4V \end{cases}$$

Recherche $I_m = \dfrac{U_{1m}}{r_1}$

$U_{1m} = k \times d_1' = 0{,}25 \times 3 = 0{,}75\ V$

$I_m = \dfrac{0.75}{20} \Rightarrow I_m = 3{,}75.10^{-2}A$

$Z = \dfrac{4}{3{,}75.10^{-2}} = 106{,}66\,\Omega$

$$C = \frac{4}{(392{,}7)\sqrt{(106{,}66)^2 - (80)^2}} \Rightarrow C = 3{,}6.10^{-5}\ (F)$$

L'auto induction L du 1er circuit

$$LCw^2 = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{Cw^2} = \frac{1}{3{,}6.10^{-5} \times (392{,}5)^2} \Rightarrow L = 0{,}18\,H$$

du circuit

0 (i est en avance sur u)

Valeur de φ

$$\varphi = -w\theta = -\frac{2\pi}{T}\theta = -\frac{2\pi}{\mathscr{L}}\ell$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{8}\times 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}\,rd$$

Application _ 4

Une bobine (de résistance R et d'auto – inductance L = 1,00) est en série avec un condensateur de capacité C. L'ensemble est soumis à une tension sinusoïdale e valeur efficace U = 2,40V (constante) et de fréquence N variable.

Les valeurs de l'intensité efficace I du courant en fonction de la fréquence N sont données dans le tableau ci-dessous :

N (Hz)	360	400	440	480	490	500	504	510	520	540	600	640	680
I(mA)	1,08	1,56	2,52	4,68	5,40	5,88	5,94	5,88	5,38	4,06	2,04	1,54	1,20

a) Trace, sur papier millimétré, la courbe *i = f(N)*.

Echelle : 0,2mm pour 1 Hz, 2cm pour 1mA.

b) Détermine graphiquement la fréquence de résonance N, l'intensité efficace I du courant correspondant.

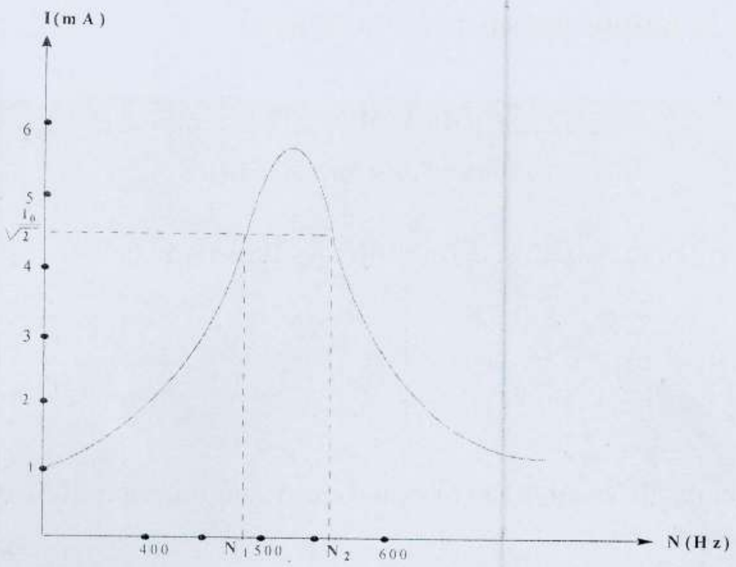
c) Calcule la résistance de la bobine

d) Calcule la capacité du condensateur.

Solution

a) Traçons i = f(N)

$$Ech\begin{cases} 2.10^{-2}cm \Rightarrow 1Hz \Rightarrow 1cm \Rightarrow \dfrac{1}{2.10^{-2}} \Rightarrow 50\,Hz \\ 2cm \Rightarrow 1mA \end{cases}$$



b) ***Fréquence N_0 :*** $N_0 = 504\,Hz$

c) ***La résistance :*** $Z = R \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{U}{I_0}$

$\Delta N : \begin{vmatrix} U = 240V \\ I_0 = 5{,}94.10^{-3}\,A \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad R = 404\,\Omega$

d) *La capacité*

$LCw^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{1}{Lw_0^2} = \dfrac{1}{4L\pi^2 N_0^2}$

$C = 9{,}84.10^{-8}\ (F)$

e) ***La largeur de la bande passante***

$\Delta w = 2\pi \Delta N$

$\Delta N = N_2 - N_1$

$\dfrac{I_0}{\sqrt{2}} = \dfrac{5{,}94}{\sqrt{2}} = 4{,}2\,mA$

$\begin{cases} N_1 = 460\,Hz \\ N_2 = 550\,Hz \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta N = 90\,Hz \quad \Rightarrow \quad \Delta w = 2\pi \times 90 = 565{,}2\,rd/s$

$Q = \dfrac{N_0}{\Delta N} = \dfrac{504}{90} \quad \Rightarrow \quad Q = 5{,}6$

$U_C = U_L = 5{,}6 \times 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad U_C = U_L = 13{,}44\ V$

2.2. Déterminer la bande passante à 3 décibels

Application _ 5

Bande passante à 3dB

1. Etablis et montre qu'à la résonance d'intensité, les limites de la bande passante sont telles que :

a) $\tan\varphi\omega_1 = -\tan\varphi\omega_2$

b) $w_1 w_2 = w_0^2$

2. Etablis de deux façons différentes l'expression de Δw en fonction de R et L.

3. Etablis en fonction de Q, w_0 et w le rapport $\frac{I_0}{I}$.

En déduis l'expression de Δw en fonction de Q.

<u>Solution</u>

1. *Démontrons φ est le déphasage tel que :*

$$\tan\varphi = \frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R}$$

w_1 *et* w_2 *sont telles que :*

$$I(w_1) = I(w_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{U}{Z(w_1)} = \frac{U}{Z(w_2)} = \frac{U}{\sqrt{2}R}$$

$$Z(w_1) = Z(w_2) = \sqrt{2}R$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(Lw - \frac{1}{Cw1}\right)^2}$$

$$Z^2(w_1) = Z^2(w_2) = 2R^2$$

$$w = w_1 \ ou \ w_2 \ \Rightarrow \ R^2 + \left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)^2 = 2R^2$$

$$\left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)^2 = R^2$$

$$Lw-\frac{1}{Cw}=\pm R$$

Pour $w=w_1 \quad \Rightarrow \quad Lw_1-\frac{1}{Cw_1}=-R$

$$\tan\varphi_1=-\frac{-R}{R}=-1$$

Pour $w=w_2 \quad \Rightarrow \quad Lw_2-\frac{1}{Cw_2}=R$

$$\tan\varphi_2=\frac{R}{R}=1$$

D'où $\tan\varphi(w_1)=-\tan\varphi(w_2)$

b) $w_1w_2=w_0^2$

$$\tan\varphi(w_1)=-\tan\varphi(w_2) \quad \Rightarrow \quad Lw_1-\frac{1}{Cw_1}=-\left(Lw_2-\frac{1}{Cw_2}\right)$$

$$Lw_1-\frac{1}{Cw_1}=\frac{1}{Cw_2}-Lw_2 \quad \Rightarrow \quad Lw_2+Lw_1=\frac{1}{Cw_2}+\frac{1}{Cw_1}$$

$$L(w_2+w_1)=\frac{1}{C}\left(\frac{1}{w_2}+\frac{1}{w_1}\right) \quad \Rightarrow \quad w_2+w_1=\frac{1}{LC}\left(\frac{w_1+w_2}{w_1w_2}\right)$$

$$1=\frac{1}{LC}\cdot\frac{1}{w_1w_2} \quad or \quad \frac{1}{LC}=w_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{w_0^2}{w_1w_2}=1 \quad \Rightarrow \quad w_1w_2=w_0^2$$

2. *Etablissons de deux façons différentes l'expression de Δw en fonction de R et L*

$$I(w_1)=I(w_2)=\frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad Z^2(w)=2R^2$$

$$\left(Lw-\frac{1}{Cw}\right)^2=R^2$$

$$Lw-\frac{1}{Cw}=\pm R$$

Méthode 1

Pour $Lw_1-\frac{1}{Cw_1}=-R$

$$LCw_1^2-1=-RCw_1$$

$$LCw_1^2+RCw_1-1=0$$

$$\Delta = (RC)^2 + LC$$

$$w_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$$

$$w'_1 = \frac{-RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} \prec 0 \text{ (à rejeter)}$$

$$\boxed{w_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}}$$

Pour $Lw_2 - \dfrac{1}{Cw_2} = R$

$$LCw_2^2 + RCw_2 - 1 = 0$$

$$\Delta = (RC)^2 + 4LC$$

$$w_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$$

$$w'_2 = \frac{RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} \prec 0 \text{ (à rejeter)}$$

$$\boxed{w_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}}$$

$$\Delta w = w_2 - w_1 = \frac{RC + \sqrt{\Delta} + RC - \sqrt{\Delta}}{2LC}$$

$$\Delta w = \frac{2RC}{2LC} \quad \Rightarrow \quad \Delta w = \frac{R}{L} \quad (rd/s)$$

Méthode 2

$$\begin{cases} LCw_2^2 - RCw_2 - 1 = 0 \\ LCw_1^2 + RCw_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$LC(w_2^2 - w_1^2) = RC(w_2 + w_1)$$

$$(w_1 + w_2)(w_2 - w_1) = \frac{R}{L}(w_2 + w_1)$$

$$w_2 - w_1 = \frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta w = \frac{R}{L}$$

3. *Rapport* $\dfrac{I_0}{I}$

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{U}{R} \\ I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(Lw - \dfrac{1}{Cw}\right)^2}} \end{cases}$$

$$\frac{I_0}{I} = \frac{U}{R} \times \frac{\sqrt{R^2 + \left(Lw - \dfrac{1}{Cw}\right)^2}}{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_0}{I} = \sqrt{\frac{R^2 + \left(Lw - \dfrac{1}{Cw}\right)^2}{R^2}}$$

$$\frac{I_0}{I} = \sqrt{1 + \left(\frac{Lw}{R} - \frac{1}{RCw_0}\right)^2} \quad on\ a\ \ Q = \frac{Lw_0}{R} = \frac{1}{RCw_0}$$

$$\frac{I_0}{I} = \sqrt{1 + \left(\frac{Lw_0}{R} \cdot \frac{w}{w_0} - \frac{1}{RCw_0} \cdot \frac{w_0}{w}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_0}{I} = \sqrt{1 + \left(Q \cdot \frac{w}{w_0} - Q\frac{w_0}{w}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{I_0}{I} = \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right)^2}}$$

Déduction

$$\Delta w = w_2 - w_1 \ \ avec\ \ I(w_1) = I(w_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{I_0}{I} = \frac{I_0}{\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$On\ aura :\ Z = 1 + Q^2\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right) = \frac{1}{Q^2}$$

$$\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} = \pm\frac{1}{Q}$$

$$Pour\ \ w = w_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{w_1^2 w_0^2}{w_0 w_1} = -\frac{1}{Q}$$

$$w_1^2 - w_0^2 = -\frac{w_0}{Q} \cdot w_1 \quad \Rightarrow \quad w_1^2 + \frac{w_0}{Q} w_1 - w_0^2 = 0 \qquad (1)$$

$$Pour\ \ w = w_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{w_2^2 w_0^2}{w_0 w_2} = \frac{1}{Q} \quad \Rightarrow \quad w_2^2 - \frac{w_0}{Q} w_2 - w_0^2 = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{cases} w_2^2 - \dfrac{w_0}{Q} w_2 - w_0^2 = 0 \\ w_1^2 + \dfrac{w_0}{Q} w_1 - w_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(w_2^2 - w_1^2\right) = \frac{w_0}{Q}\left(w_2 + w_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad (w_2 - w_1)(w_2 + w_1) = \frac{w_0}{Q}\left(w_2 + w_1\right)$$

$$w_2 - w_1 = \frac{w_0}{Q}$$

$$\Delta w = \frac{w_0}{Q} \quad (rd/s)$$

2.3. Déterminer la puissance d'un circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

Application _ 6

Puissance d'un circuit RLC

1. **Etablis l'expression de la puissance instantanée d'un circuit RLC.**
2. **BAC : Etablis l'expression de la puissance moyenne d'un circuit sinusoïdal forcé.**

Définis le facteur de puissance. Quel préjudice un consommateur cause t – il à la société Energie du Mali lorsque le facteur de puissance de son installation est faible (V.C).

Solution

1. ***Etablissons l'expression de la puissance instantanée***

$$\mathscr{P} = ui$$

$$\begin{cases} i = I_m \cos wt = I\sqrt{2}\cos wt \\ u = U_m \cos t(wt + \varphi) = U\sqrt{2}\cos(wt + \varphi) \end{cases}$$

$$\mathscr{P} = 2UI\cos(wt + \varphi)\cos wt$$

$$\mathscr{P} = 2UI \times \frac{1}{2}\left[\cos(wt + \varphi + wt + wt)\right]$$

$$\mathscr{P} = UI\left[\cos(2wt + \varphi) + \cos\varphi\right] \quad (Watts)$$

2. ***La puissance moyenne***

Pendant dt, l'énergie du circuit est $d\varepsilon = \mathscr{P}dt$

Pendant une période : $E = PT = \int^{T} \mathscr{P} dt$

Or $\mathscr{P} = UI[\cos(2wt+\varphi)+\cos\varphi]$

$PT = UI\cos\varphi\int_0^T dt + UI\int_0^T \cos(2wt+\varphi)dt$

$\int_0^T \cos(2wt+\varphi)dt = \frac{1}{2w}[\sin(2wt+\varphi)]_0^T = \frac{1}{2w}\left[\sin\left(\frac{4\pi}{T}T+\varphi\right)-\sin\varphi\right] = \frac{1}{2w}(\sin\varphi-\sin\varphi)$

Donc $PT = UI\cos\varphi T$

Alors la puissance du circuit est $P = UI\cos\varphi$ *(Watts)*

2.4. Etablir les expressions des intensités et tensions efficace.

Application _ 7

Intensité et tension efficace

Etablis :

1. l'expression de I_{eff}.

2. l'expression de U_{eff}

<u>*Solution*</u>

1. L'expression de I_{eff}

Soit $i = I_m \cos wt$

$I = I_{eff}$ *si et seulement si pendant T,* $RI^2T = R\int_0^T i^2dt = R\int_0^T I_m^2\cos^2 wt\, dt$

$I^2T = I_m^2\int_0^T \cos^2 wt\, dt$

$\cos^2 wt = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2wt \quad \Rightarrow \quad I^2T = \frac{1}{2}I_m^2\int_0^T dt + \frac{1}{2}I_m^2\int_0^T \cos 2wt\, dt$

Or $\int_0^T \cos 2wt\, dt = \frac{1}{2wt}[\sin 2wt]_0^T = 0$

$I^2T = \frac{1}{2}I_m^2 T \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (A)$

Tension efficace

$= RI^2T$

$Or\ U = RI \Rightarrow I = \frac{U}{R} \Rightarrow Q = \frac{1}{R}U^2T$

$Soit\ u = U_m \cos wt$

$U = U_{eff}$ *si seulement si pendant T*

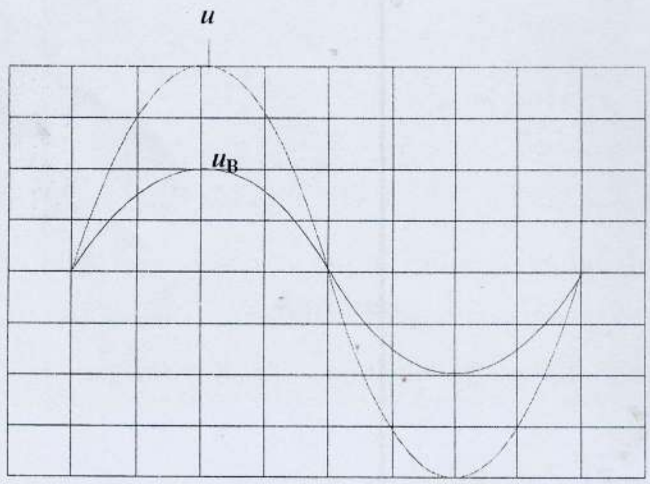
$\frac{1}{R}U^2T = \frac{1}{R}\int_0^T U_m^2 \cos^2 wt\, dt \Rightarrow U^2T = U_m^2 \int_0^T \cos^2 wt\, dt$

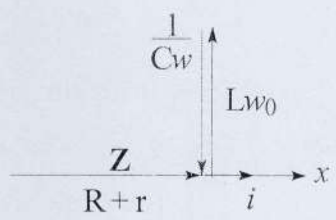
$Or\ \cos^2 wt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2wt \Rightarrow U^2T = \frac{1}{2}U_m^2 \int_0^T dt + \frac{1}{2}U_m^2 \int_0^T \cos 2wt\, dt$

$Or\ \int_0^T \cos 2wt\, dt = 0 \Rightarrow U^2T = \frac{1}{2}U_m^2 T \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\ (V)$

NB : *A la résonance d'intensité* $i_0 = I_{0m} \cos w_0 t$ *et* $u = U_m \cos w_0 t$

$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$





2.5. Décrire des expériences de mises en évidence des oscillations électriques forcées et de la résonance d'intensité.

Application _ 8

Expérience de mise en évidence

Décris une expérience permettant de mettre en évidence :

1. **des oscillations électriques forcées.**
2. **de la résonance**

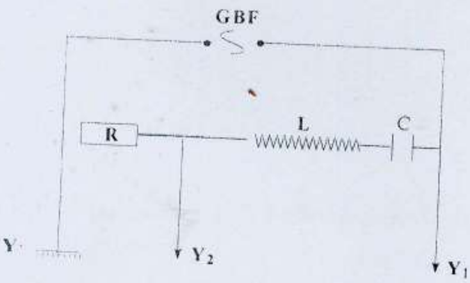
Solution

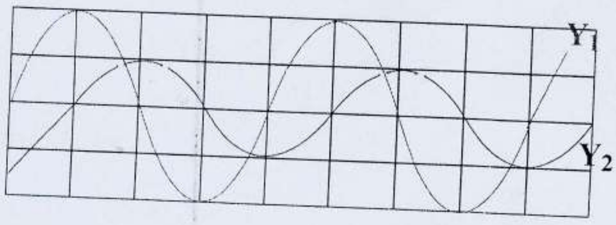
I. *Expérience de mise en évidence d'oscillations électriques forcées*

On dispose d'un circuit RLC en série de fréquence propre N_0, d'un GBF de fréquence $N \neq N_0$ et un oscilloscope bi courbes (2 voies).

L'une des voies (Y_1) visualise la tension aux bornes de GBF ; l'autre (Y_2) visualise la tension aux bornes de R (donc **représente les variations de i***).*

Lorsqu'on ferme le circuit, on observe sur l'écran de l'oscilloscope deux courbes ayant même période (donc **même fréquence***) ainsi la fréquence du courant est égale à la fréquence N de la tension du GBF. Cette fréquence étant différente de la fréquence N0 du circuit alors* **le dipôle RLC est en régime sinusoïdal forcé.**





$$\begin{cases} T = \mathcal{I} \times s \\ U_m = k_1 d_1 \\ Z = \dfrac{U_m}{I_m} \end{cases} \qquad I_m = \frac{U_{2m}}{R} \quad U_{2m} = k_2 d_2$$

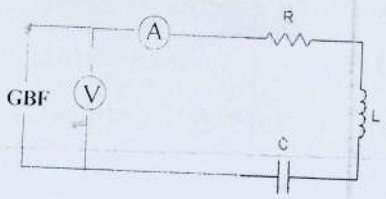
De la résonance

dispose d'un circuit RLC en série de fréquence propre N0, d'un GBF de fréquence N variable, un –(A) – et d'un –(V) –.

ons une valeur de F et maintenons la tension constante. Lorsqu'on fait varier les fréquences on stante que l'intensité efficace du courant augmente et devient maximale égale à I_0 lorsque $N= N_0$: **st la résonance d'intensité.**

orsque la valeur de R faible, la courbe réponse $i = f(N)$ possède un maximum passé : **c'est la nance aiguë.**

orsque R est élevé, la réponse est plus aplatie : **c'est la résonance floue.**



3. On règle maintenant la fréquence à la valeur f telle que $I(f_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} I(f_0)$ avec $f_1 \prec f_0$

a) Montre que la phase de la tension par rapport à l'intensité est $-\frac{\pi}{4}$

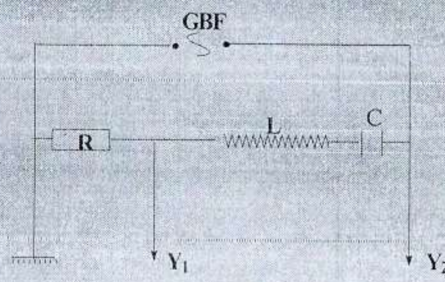
b) Exprime en fonction de la période le décalage observé entre les deux courbes.
Détermine (en cm) le décalage, avec le réglage du balayage précédent, entre deux sommets successifs de u_1 et u_2.

Page 148 (suite)

Application _ 9

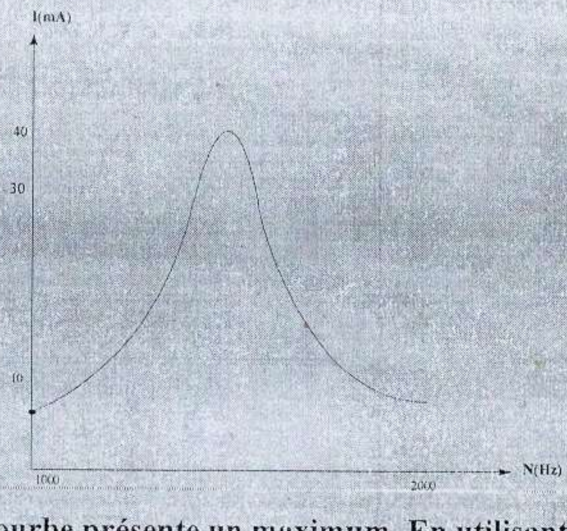
Un circuit comprend, montés en série, un générateur G, un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, un condensateur de capacité C. Le générateur maintient entre ses bornes une tension sinusoïdale de valeur efficace U = 4V, de fréquence réglable f.

Fig. a



La figure b représente la variation de i en fonction de f

Fig.b



1. a) **Explique pourquoi la courbe présente un maximum. En utilisant cette courbe, trouve la fréquence de résonance f_0 et la valeur de R.**

b) **Trouve à partir de la courbe la bande passante et le facteur de qualité Q. En déduis L et C**

c) **Quelle est la valeur de I pour f = 0 ?**

2. **On branche un oscillographe bicourbe (fig. a)**

a) **Quelles sont les grandeurs électriques visualisées par les voies Y_1 et Y_2 de l'oscillographe ?**

b) **On règle f pour que ces deux grandeurs soient en phase. Quelle est alors la longueur occupée par une période si le balayage est réglé à 100µs par cm ?**

1. a) **Expliquons :** $I_{eff} = \frac{U}{Z}$

Lorsque f varie Z varie et devient minimale, la valeur maximale I_0 de I correspond à Z_{min}.

D'après le graphe $f_0 = 1600\ Hz$

$$R = \frac{U}{I_0} = \frac{4}{4.10^{-3}} = 100\Omega \quad \Rightarrow \quad R = 100\Omega$$

b) La bande passante

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 28,28\,mA \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_1 = 1550\ Hz \\ f_2 = 1700\,Hz \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta f = 1700 - 1550 = 150\,Hz$$

$$\Delta w = 2\pi\Delta f = 2\pi \times 150 = 942 \quad \Rightarrow \quad \Delta w = 942\,rd/s$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1600}{150} \quad \Rightarrow \quad Q = 10,66 \quad (\text{le circuit est sélectif})$$

Déduction de L et C

$$\Delta w = \frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{R}{\Delta w} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{100}{942} \quad \Rightarrow \quad L = 0,1\,H$$

$$LCw_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{Lw_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0 L}$$

$$C = \frac{1}{40 \times (1000)^2 \times 0,1} \quad \Rightarrow \quad C = 9,76.10^{-8}\,F$$

c) La valeur de I :

Lorsque $f = 0 \quad \Rightarrow \quad I = 0$ *car pour* $f = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = \infty$

2. a) **La voie Y_1 visualise la tension aux bornes de R (u_1)**

La voie Y_2 visualise la tension aux bornes du GBF (u).

b) Longueur L

u_1 et u sont en phase à la résonance d'intensité.

$$T = T_0 = \mathscr{L} \times s \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L} = \frac{T_0}{s}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{0,1 \times 9,76.10^{-8}} = 6,2.10^{-4}\,s$$

$= \frac{6,2.10^{-4}}{10^{-4}} = 6,2 \Rightarrow \quad = 6,2cm$

3. a) *Démonstration (V.C)*

$I(f_1) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow Z(f_1) = 2R$

$$R^2 + \left(Lw_1 - \frac{1}{Cw_1}\right)^2 = 2R^2$$

$$Lw_1 - \frac{1}{Cw_1} = -R$$

$$Or \ \tan\varphi_1 = \frac{Lw_1 - \frac{1}{Cw_1}}{R} = \frac{-R}{R} = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}\ (rd)$$

$$|\varphi_1| = \frac{2\pi}{T}\theta$$

$$2\pi\theta = |\varphi_1|T \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{|\varphi_1|T}{2\pi} \quad (s)$$

$\theta \Rightarrow \ell$

$$AN : \begin{cases} |\varphi_1| = \frac{\pi}{4}\ rd \\ T \rightarrow \quad = 6.2cm \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{\pi}{4} \times \frac{6,2}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \ell - 0,775$$

Application _ 10

Un générateur fournit une tension sinusoïdale de pulsation ω. Entre A et B se trouve une bobine de résistance R_1 et d'inductance L_1 son impédance est notée Z_1. Entre B et C se trouve un conducteur ohmique de résistance R_2. L'intensité instantanée du courant est (en A) : (figure)

i = Imsinwt

1. On note φ la phase de la tension entre les bornes A et B par rapport à l'intensité du courant. Exprimes en onction de Z_1, R_2, I_m, t et φ les tensions instantanées u_{AB} et u_{AC} A et B par rapport à l'intensité du courant.
2. On place un voltmètre de grande impédance successivement entre A et B, puis entre B et C et entre A et C : il indique les valeurs efficaces suivantes :

   $U_{AB} = 45$ V ; $U_{BC} = 40$ V ; $U_{AC} = 75$ V

a) Ecris la relation entre les tensions instantanées U_{AB}, U_{AC} et U_{BC}

b) En utilisant la construction de Fresnel, montres que la phase φ vérifie la relation :

$$\cos\varphi = \frac{U_{AC}^2 - U_{BC}^2 - U_{AB}^2}{2U_{BC} \cdot U_{AB}}$$

3. On donne $R_2 = 20\ \Omega$. Calcule :

a) la puissance consommée dans le conducteur ohmique ;

b) la puissance consommée dans la bobine,

c) la résistance de la bobine.

Solution

1. Expression des tensions instantanées

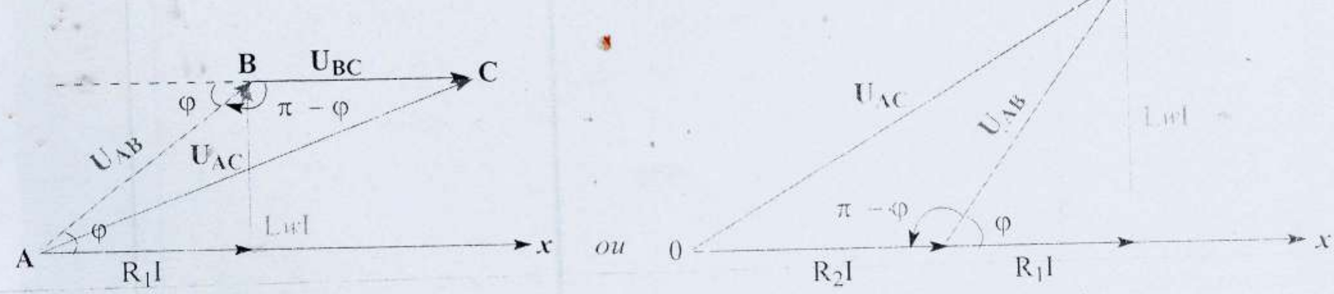
$$U_{AB} = Z_1 I_m \sin wt$$

$$U_{BC} = R_2 I_m \sin wt$$

2. a) Relation entre les tensions

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$$

Démontrons



$U_{AC}^2 = U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - 2U_{AB} \cdot U_{BC} \cos(\pi - \varphi)$

$\cos(\pi - \varphi) = -\cos\alpha$

$U_{AC}^2 = U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + 2U_{AB} \cdot U_{BC} \cos\varphi$

$$2U_{AB} \cdot U_{BC} \cos\varphi = U_{AC}^2 - \left(U_{AB}^2 + U_{BC}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{U_{AC}^2 - U_{AB}^2 - U_{BC}^2}{2U_{AB} \cdot U_{BC}}$$

3. ***Calculons***

a) ***La puissance consommée dans R2***

$P_2 = R_2 I^2$

Recherche de I

$$U_{BC} = R_2 I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_{BC}}{R_2} = \frac{40}{20} = 2 \quad \Rightarrow \quad I = 2\,A$$

$P_2 = 2^2 \times 20 \quad \Rightarrow \quad P_2 = 80\ Watts$

b) ***La puissance*** $P_B = P_1$

$P_1 = U_{AB} I \cos\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{75^2 - \left(45^2 + 40^2\right)}{2 \times 45 \times 40} = 0{,}55$$

$P_1 = 45 \times 2 \times 0{,}55 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 49{,}5\ Watts$

c) ***Déduction de R_1***

$$P_1 = R_1 I^2 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{P}{I^2} = \frac{49{,}5}{4}$$

$R_1 = 12{,}375\,\Omega$

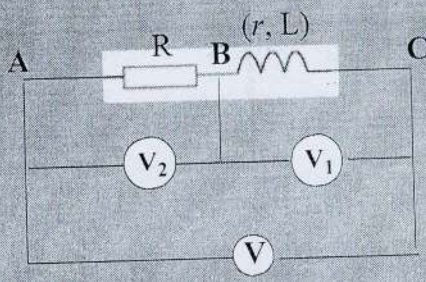
$NB : P_t = P_1 + P_2 \ ou \ P_t = (R_1 + R_2) I^2$

$P_t = 129{,}5\ W$

Application _ 11

Bobine _ Méthode des 3 voltmètres

1. **On considère le montage suivant :**



$V_1 = 30$ V

$V_2 = 40$ V

$V = 65$ V

Trouve r, L. Sachant que $R = 15\Omega$ et $f = 50$ Hz

2. **Associations de 2 bobines.**

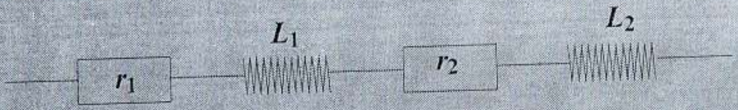
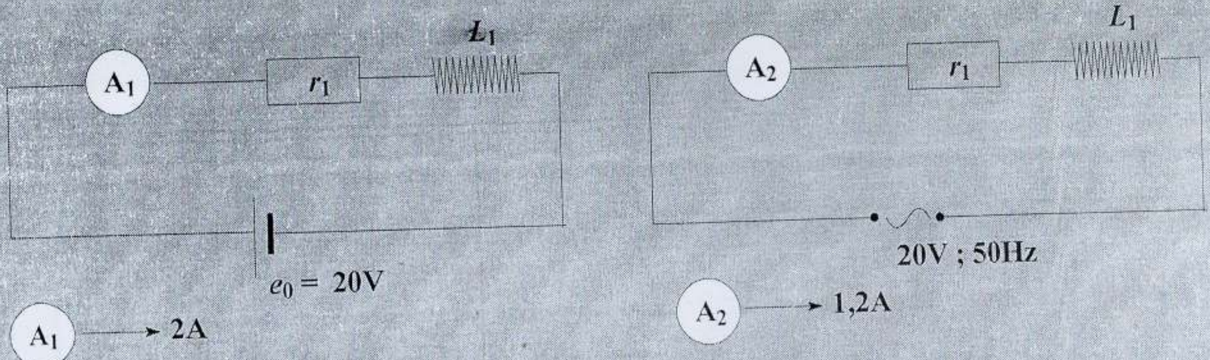


fig.1



2.1. Trouves r_1 et L_1

2.2. On monte en série avec la bobine 1 une bobine 2 (r_2, L_2) fig.1

$r_2 = 15\Omega$

Trouves L_2 sachant que $z = z_1 + z_2$ (vectorielle).

<u>Solution</u>

1) Valeur de r et L

$$Z_b^2 = r^2 + (Lw)^2$$

$$Z^2 = (R + r)^2 + (Lw)^2$$

$$= R^2 + 2Rr + r^2 + (Lw)^2$$

$$Z^2 = R^2 + 2Rr + Z_b^2$$

$$2Rr = Z^2 - \left(R^2 + Z_b^2\right) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{Z^2 - \left(R^2 + Z_b^2\right)}{2R}$$

Recherche de Z_b et Z

$$Z_b = \frac{U_2}{I}$$

$$I = \frac{U_1}{R} = \frac{30}{15} = 2A$$

$$Z_b = \frac{40}{2} = 20\Omega$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{65}{2} = 32{,}5\Omega \quad \Rightarrow \quad r = \frac{(32{,}5)^2 - \left(15^2 + 20^2\right)}{30} = 14{,}4$$

$$r = 14{,}4\Omega$$

$$Z_b^2 = r^2 + (Lw)^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{w}\sqrt{Z_b^2 - r^2}$$

$$L = \frac{1}{314}\sqrt{20^2 - 14{,}4^2} \quad \Rightarrow \quad L = 4{,}4.10^{-2}\,H$$

2.1. Association de deux bobines

$$r_1 = \frac{e_0}{I_1}$$

$$AN : \begin{cases} e_0 = 20V \\ I_1 \rightarrow (A_1) = 2A \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{20}{2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 10\Omega$$

$$Z_b^2 = r_1^2 + (L_1 w)^2 \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{1}{w}\sqrt{Z_b^2 - r_1^2}$$

$$AN : \; Z_b = \frac{U}{I_2} = \frac{20}{1{,}2} \quad \Rightarrow \quad Z_b = 16{,}66\Omega$$

$$L = \frac{1}{314}\sqrt{(16{,}66)^2 - 10^2} \quad \Rightarrow \quad L = 4{,}2.10^{-2}\,H$$

2.2. Valeur de L_2

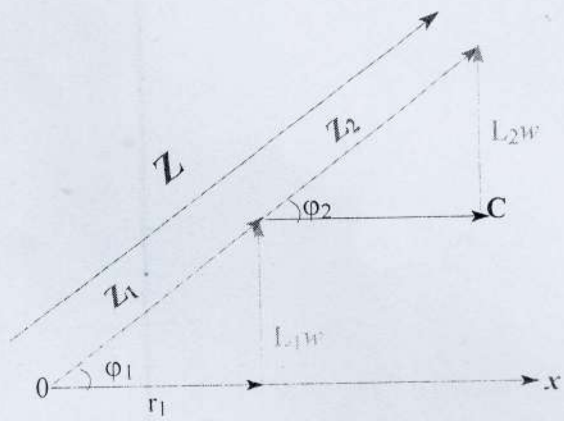
$z = z_1 + z_2$

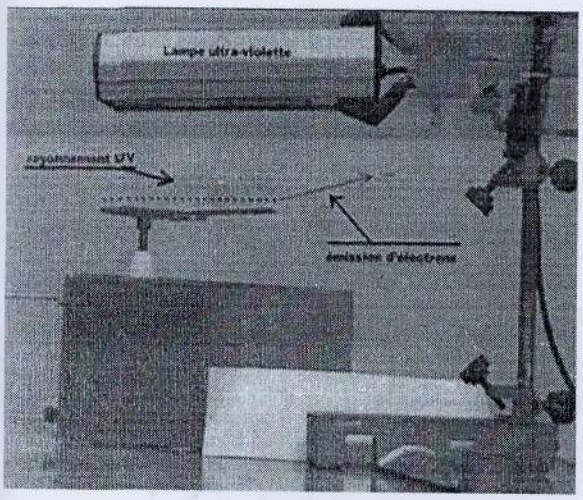
$z = z_1 + z_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi_1 = \tan\varphi_2$

$$\frac{L_1 w}{r_1} = \frac{L_2 w}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$$

$$L_2 = \frac{L_2 r_2}{r_1}$$

$$AN: L_2 = \frac{15}{10} \times 4{,}2.10^{-2} \quad \Rightarrow \quad L_2 = 6{,}3.10^{-2}\ (H)$$





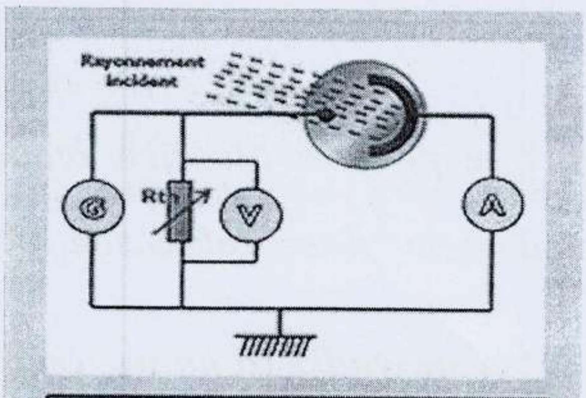
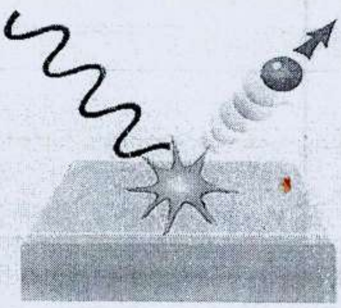


Schéma de mise en évidence de l'effet photo-électrique

EFFET PHOTOELECTRIQUE



Situation problème :

Oumar se pose la question comment une cellule photoélectrique ne fonctionne pas dans l'obscurité.

Il veut comprendre la nature corpusculaire de la lumière, l'hypothèse d'Einstein.

L'élève veut comprendre le fonctionnement des photopiles et bien d'autres aspects de la physique corpusculaire

1. Ce qu'il faut savoir

1.1. Les définitions générales

- **Les porteurs de charge dans les métaux :** Ce sont des électrons dans les métaux.

Les électrons sont liés au métal par une énergie appelée **travail d'extraction**.

- **Le travail d'extraction d'un métal :** Est l'énergie minimale W_0 qu'il faut fournir à ce métal pour qu'il émette des électrons.

$w_0 = hN_0 = \frac{hC}{\lambda_0}$ (J) ou (eV) ; **1eV = 1,6.10^{-19}J**

- **La fréquence d'extraction d'un métal :** Est la valeur minimale N_0 des fréquences lumineuses pour lesquelles ce métal émet des électrons.

$N_0 = \frac{w_0}{h}$ ou $N_0 = \frac{C}{\lambda_0}$ (Hz)

- **La longueur d'onde seuil :** Est la valeur minimale λ_0 des longueurs d'ondes lumineux pour lesquelles ce métal émet des électrons.

$\lambda_0 = \frac{hC}{w_0}$ *ou* $\lambda_0 = \frac{C}{\nu_0}$ (m)

- **L'effet photoélectrique :**

- Définition :

Est l'émission d'électrons par un métal convenablement éclairé.

- Lois :

* Il y a émission d'électron lumineuse incidente est supérieure ou égale au travail d'extraction du métal ; dans ce cas. $E \geq w_0 \quad \Rightarrow \begin{cases} N \geq N_0 \\ ou \\ \lambda \leq \lambda_0 \end{cases}$

* L'effet photoélectrique est instantané ; il accompagne la lumière.

* L'effet photoélectrique ne dépend pas de la puissance rayonnante ; il ne dépend que sa fréquence.

* Le courant de saturation est proportionnel à la puissance incidente.

- Applications :

L'effet photoélectrique permet de convertir la lumière en énergie électrique. Il est utilisé :

* dans les photopiles,

* pour le fonctionnement de petits mécanismes : Porte de garage, extincteur d''incendie, escaliers roulants.

- **Le courant de saturation :**

- Définition :

Est l'intensité maximale $\mathcal{I}_s$ du courant produit par un flux lumineux.

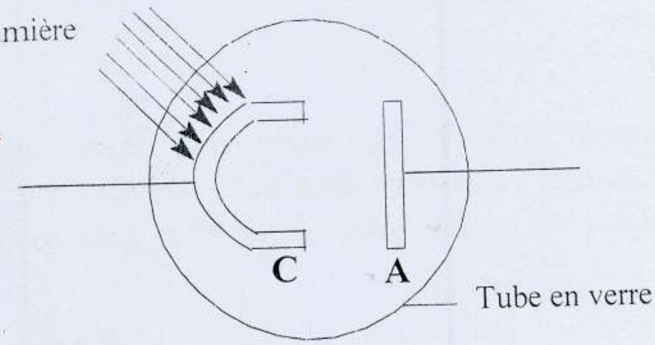
$$\mathcal{I}_S = n'e$$

$$\begin{cases} n' = nombre\ d'\acute{e}lectron\ \acute{e}mis\ par\ seconde \\ e = 1{,}6.10^{-19}\ C \end{cases}$$

- <u>Nombre d'électrons émis par seconde :</u> Est le quotient du courant de saturation par la charge élémentaire.

$$n' = \frac{\mathcal{I}_S}{e}$$

- **Une cellule photoélectrique :** Est un tube à vide contenant une cathode et une anode, elle permet la mise en évidence de l'effet photoélectrique dans le vide.



- <u>La puissance incidente :</u> Est la puissance de la radiation lumineuse frappant le métal.

$$\mathcal{P} = n w_p$$

$$\begin{cases} n = nombre\ de\ photons\ incidents\ par\ seconde \\ w_p = \dfrac{hC}{\lambda_p} \end{cases}$$

- <u>Nombre de photons incidents par seconde</u> : Est le quotient de la puissance rayonnante par l'énergie incidente d'un photon.

$$n = \frac{\mathcal{P}}{w_p} = \frac{\mathcal{P}\lambda_p}{hC}$$

- <u>Le rendement d'une cellule :</u> Est le quotient du nombre d'électrons émis par seconde par le nombre de photons incidents par seconde.

$$\boxed{r = \frac{n'}{n} \quad ou \quad r = \frac{\mathcal{I}_S \cdot hC}{e \cdot \mathcal{P} \cdot \lambda_p}}$$

1.2. Energie lumineuse

- **Hypothèse d'Einstein :** La lumière s'échange par quanta de photons ; dans un rayon lumineux il y a de multitude de photons : la lumière est corpusculaire.
- **Energie cinétique des électrons émis :** L'énergie lumineuse reçue par un métal est utilisée pou

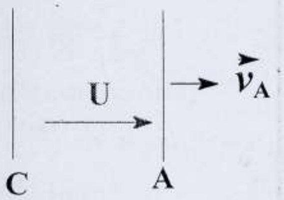
1.2. Energie lumineuse

- **Hypothèse d'Einstein :** La lumière s'échange par quanta de photons ; dans un rayon lumineux il y a de multitude de photons : la lumière est corpusculaire.
- **Energie cinétique des électrons émis :** L'énergie lumineuse reçue par un métal est utilisée pour extraire l'électron puis lui donner une énergie cinétique.

$$E = W_0 + E_C \quad \Rightarrow \quad E_C = E - W_0$$

NB : La vitesse d'amortissement d'un électron : $E_C = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$

- **Vitesse d'arrivée d'un électron à l'anode :** Les électrons émis par la cathode sont accélérés par une tension U = U_{AC}



$$TEC(C, A) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = eU$$

$$\begin{cases} v_A = V \\ v_C = v_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = eU \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}$$

Pour $v_0 \prec\prec\prec V \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ (m/s)

- **Le potentiel d'arrêt :** Est la valeur U_0 de la tension entre la cathode et l'anode pour laquelle les électrons émis par la cathode n'arrivent pas à l'anode. C'est une tension négative.

Pour $|U| = U_0 \quad ; \quad v_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = eU$

$$|U| = U_0 = \frac{mv_0^2}{2e} \quad \text{(V)}$$

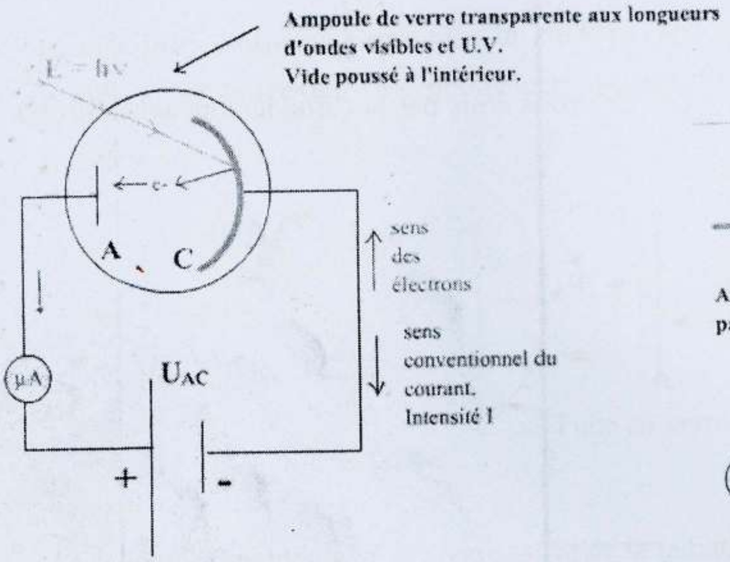
2. Ce qu'il faut savoir faire :

Application _ 1

Décrire des expériences de mise en évidence.

Expérience 1 : Mise en évidence dans le vide

La cellule photoélectrique permet de mettre en évidence l'effet photoélectrique dans le vide.



: flux lumineux de longueur d'onde λ (fréquence ν)

: cathode (C) avec métal susceptible de photoémission (antimoine, caesium ...)

A : = anode, portée à la tension positive U_{AC} par rapport à la cathode C.

e- : électron arraché à la cathode après absorption du photon d'énergie E . Il se dirige vers l'anode positive A. Un courant électrique est ainsi généré.

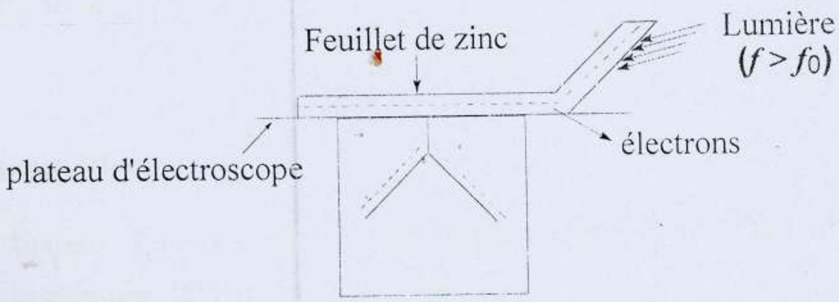
(μA) : microampèremètre

On dispose d'une cellule photoélectrique, un générateur et d'un milliampèremètre.

- *A l'absence de la lumière le milliampèremètre n'indique aucun courant quelque soit la tension aux bornes du générateur.*
- *Lorsqu'on éclaire suffisamment la cathode le milliampèremètre indique le passage d'un courant : la cathode éclairé a émis:* ***c'est l'effet photoélectrique***.

Expérience 2 : Mise en évidence dans l'air.

L'expérience de Hertz permet de mettre en évidence l'effet photoélectrique dans l'air.



Une plaque de zinc bien taillée est placée sur le plateau d'un électroscope chargé négativement. Lorsqu'on éclaire suffisamment la feuille de zinc, on constate que les feuilles de l'électroscope s'approchent peu à peu. Cela est dû à la diminution des charges électriques des feuilles de l'électroscope à cause de la fuite des électrons du zinc.

La plaque de zinc éclairée a émis des électrons : ***c'est l'effet photoélectrique.***

Application _ 2

L'effet photoélectrique

La cathode d'une cellule photoélectrique est constitué d'un métal dont le travail d'extraction est $w_0 = 2{,}6eV$.

1. On éclaire cette cellule successivement à l'aide des radiations monochromatique de longueur d'onde $\lambda_1 = 0{,}675\,\mu m$; $\lambda_2 = 500nm$; $\lambda_3 = 300nm$

a. Calcule en Joule le travail d'extraction de ce métal.

b. Trouve la fréquence seuil, puis la longueur d'onde seuil de ce métal.

c. Pour quelle longueur d'onde λ ce métal émet – il des électrons

2. Dans le cas où il y a émission d'électrons :

a. Calcule l'énergie cinétique et la vitesse d'émission d'un électron.

b. Trouve la vitesse d'arrivée à l'anode sous une tension $U_{AC} = 100V$.

c. Quel est le potentiel d'arrêt de cette cellule ?

d. Dans le cas d'émission d'électrons, le courant de saturation est $\mathcal{I}_s = 6\mu A$ sous une puissance rayonnante $\mathcal{P} = 3mW$.

3. a. Calcule le nombre de photons incidents par seconde.

b. Calcule le nombre d'électrons émis.

c. En déduis le rendement de la cellule.

d. Quelle devrait être la valeur de la puissance rayonnante avec le même courant de saturation pour que le rendement soit 10%.

Solution

1. a. Valeur de w_0 en Joule

$w_0 = 2{,}6eV$

$$\left.\begin{array}{l} 1eV \Rightarrow 1{,}6.10^{-19}J \\ 2{,}6eV \Rightarrow x \end{array}\right| \Rightarrow w_0 = 1{,}6.10^{-9} \times 2{,}6 = 4{,}16.10^{-19}J$$

b. Trouvons

* La fréquence seuil :

$$N_0 = \frac{w_0}{h}$$

$$AN : \begin{cases} w_0 = 4{,}16.10^{-19}\,J \\ h = 6{,}62.10^{-34}\,J.s \end{cases} \Rightarrow N_0 = 6{,}28.10^{14}\,Hz$$

* La longueur d'onde seuil

$$\lambda_0 = \frac{C}{N_0}$$

$$AN : \begin{cases} C = 3.10^8\,m/s \\ N_0 = 6{,}28.10^{14}\,Hz \end{cases} \Rightarrow \lambda_0 = 0{,}475.10^{-6}\,m$$

c. La longueur d'onde

Il y a émission d'électron si seulement si $\lambda \leq \lambda_0$

- $\lambda_1 = 0{,}675\,\mu m$

$\lambda_1 \succ \lambda_0$: *Il n'y a pas d'effet joule.*

- $\lambda_2 = 500\,nm \Rightarrow \lambda_2 = 0{,}5\,\mu m$

$\lambda_2 \succ \lambda_0$: *pas d'effet.*

- $\lambda_3 = 0{,}3\,\mu m \prec \lambda_0$ *il y a effet*

2. a. Calculons

* L'énergie cinétique

$$E_C = E - w_0$$

$$AN : \begin{cases} E = \dfrac{hC}{\lambda_3} = \dfrac{6{,}62.10^{-34} \times 3.10^8}{0{,}3.10^{-6}} \\ w_0 = 4{,}16.10^{-19}\,J \end{cases} \Rightarrow E_C = 6{,}6.10^{-19} - 4{,}16.10^{-19}\,J = 2{,}46.10^{-19}\,J$$

$$E_C = 2{,}46.10^{-19}\,J$$

* La vitesse d'émission

$$E_C = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

$$AN : \begin{cases} E_C = 2{,}46.10^{-19}\,J \\ m = 9{,}1.10^{-31}\,Kg \end{cases} \Rightarrow v_0 = 7{,}35.10^5\,m/s$$

b. Trouvons la vitesse d'arrivée à l'anode des électrons

$$V = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}$$

$$AN : \begin{cases} v_0 = 7{,}35.10^5 \, m/s \\ U_{AC} = 100 V \\ e = 1{,}6.10^{-19} C \\ m = 9{,}1.10^{-31} \, Kg \end{cases} \Rightarrow \quad V = 5{,}97.10^6 \, m/s$$

c. ***Le potentiel d'arrêt***

$$U_0 = \frac{mv_0^2}{2e}$$

$$U_0 = \frac{9{,}1.10^{-31} \times (7{,}35.10^5)^2}{2 \times 1{,}6.10^{-19}} = 1{,}54 \quad \Rightarrow \quad U_0 = 1{,}54 \quad (V)$$

2. a. *Calculons le nombre de photons incidents par seconde*

$$n = \frac{\mathcal{P}}{w_p}$$

$$AN : \begin{cases} \mathcal{P} = 3mW = 3.10^{-3} W \\ w_p = \dfrac{hC}{\lambda_3} = 6{,}62.10^{-19} J \end{cases} \Rightarrow \quad n = \frac{3.10^{-3}}{6{,}62.10^{-19}} = 4{,}53.10^{15} \quad \Rightarrow \quad n = 4{,}53.10^{15}$$

b. ***Le nombre d'électron émis par seconde***

$$n' = \frac{\mathcal{I}_S}{e}$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_S = 6 \mu A = 6.10^{-6} A \\ e = 1{,}6.10^{-19} C \end{cases} \Rightarrow \quad n' = 3{,}75.10^{13}$$

c. ***Déduction du rendement***

$$r = \frac{n'}{n} = \frac{3{,}7510^{13}}{4{,}5310^{15}} = 8{,}27.10^{-3}$$

$$r = 0{,}827\,\%$$

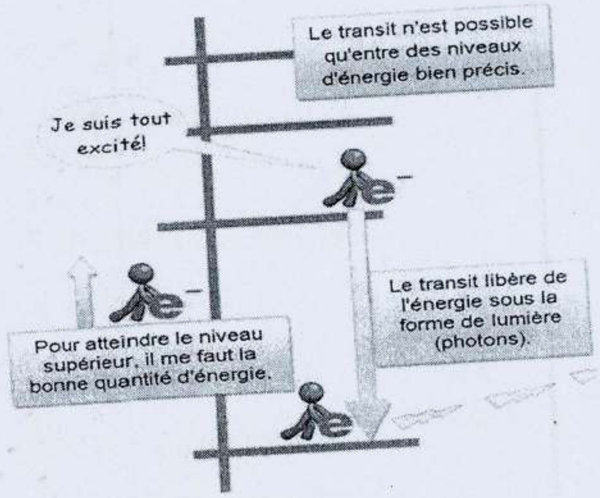
d. ***La puissance rayonnante $\mathcal{P}'$:***

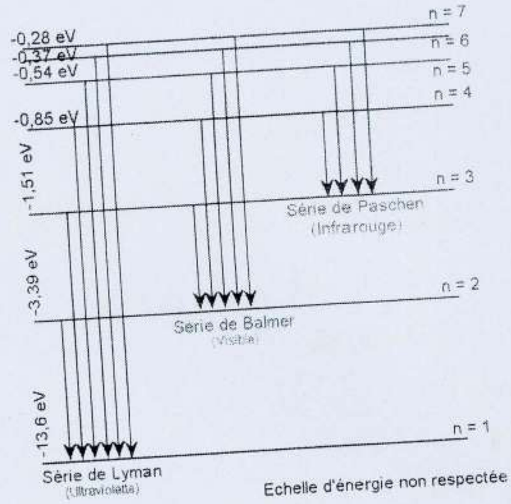
$$\begin{cases} r' = \dfrac{\mathcal{I}_s}{e} \cdot \dfrac{hC}{\mathcal{P}' \cdot \lambda_3} \\ r = \dfrac{\mathcal{I}_s}{e} \cdot \dfrac{hC}{\mathcal{P} \cdot \lambda_3} \end{cases} \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}' = \frac{\mathcal{P}}{r'}$$

$$\mathcal{P}' = \frac{3 \times 0{,}827}{0{,}1} = 24{,}81$$

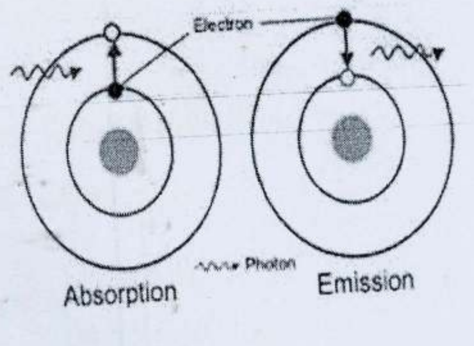
$$\mathcal{P}' = 24{,}81 \, mW$$

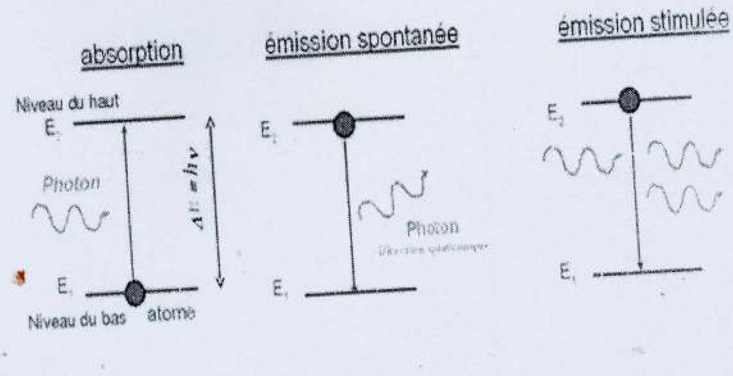
Ce qu'il faut savoir !





NIVEAUX D'ENERGIES





Situation problème :

Lors d'une conférence du Docteur Cheick Modibo DIARRA dans la salle de conférence du Lycée Technique de Bamako, Nana et Rose se sont intéressés aux questions liées à l'astrophysique.

Elles ont posé des questions sur les quasars ; la nature de la lumière dans les lampes à gaz, l'observation de lucioles dans les cimetières pendant la nuit

Les élèves veulent surtout comprendre les niveaux d'énergie dans l'atome d'hydrogène.

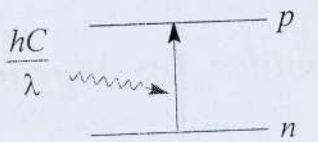
1. Ce qu'il faut savoir

1.1. Les définitions générales

- **L'atome d'hydrogène :** Est un atome de symbole ${}^{1}_{1}H$
- **Le nombre quantique principal :** Est le numéro n de la couche occupée par l'électron de l'atome.
- **Le niveau d'énergie :** Est l'état énergétique de l'atome. Chaque niveau est caractérisé par le nombre n.
- **L'état fondamental :** Est de plus basse énergie ; il correspond à $n=1$.
- **L'état ionisé :** Est l'état de plus grande énergie ; il correspond à $n=\infty$
- **L'état excité :** Est tout état entre l'état fondamental et l'état ionisé.
- **Une transition :** Est le passage d'un état à un autre.

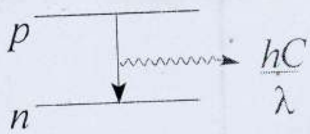
Toute transition s'accompagne d'émission ou d'absorption d'énergie.

- La transition d'un niveau inférieur à un niveau supérieur s'accompagne d'absorption d'énergie.



$$E(n.p) = Ep - En$$

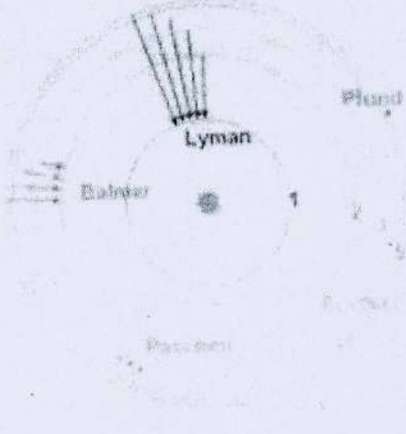
- La transition d'un niveau supérieur à un niveau inférieur s'accompagne d'émission d'énergie.



$$E(n,p) = Ep - En$$

- **Une série d'émission :** Est un ensemble de transition aboutissant à un même niveau d'énergie.

Les séries d'émissions de l'atome d'hydrogène :



* **Série de Lyman :** retour au niveau **1**

* **Série de Balmer :** retour au niveau **2**

* **Série de Paschen :** retour au niveau **3**

* **Série de Bracket :** retour au niveau **4**

* **Série de Pfund :** retour au niveau **5**

2. Ce qu'il faut savoir faire

Déterminer les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène.

Application _ 1

Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

Les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène vérifient la relation $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ **avec** $\begin{cases} E_0 = 13{,}6\,eV \\ n \geq 1 \end{cases}$

1. a. Calcule : E_1 ; E_2 ; E_3 ; E_4 ; E_5 ; E_6 ; E_7 ; E_∞

b. A quoi correspond E_1 ; E_∞ **?**

c. A partir des résultats précèdent, justifie « les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène sont quantifiés ? »

2. a. Trace le diagramme des énergies

b. Cite les séries d'émission de l'atome d'hydrogène. Représente sur le diagramme, trace les transitions correspondantes à ces séries.

c. Que se passe t – il lorsqu'on transmet à l'atome d'hydrogène les énergies suivantes à partir de l'état fondamental $E_1 = 10\,eV$; $E_2 = 11{,}2\,eV$; $E_3 = 13{,}6\,eV$.

3. Montre que la longueur d'onde de la radiation correspondant à une transition de p à n vérifie la relation : $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$ **; calcule** R_H.

c. En déduis les longueurs d'ondes des radiations des 4 premières transitions des séries de Lyman et Balmer. Situé ses radiations dans le domaine spectral.

Solution

1. *a. Calculons*

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2}$$

$E_1 = -13{,}6\,eV$	$E_5 = -0{,}54\,eV$
$E_2 = -3{,}4\,eV$	$E_6 = -0{,}37\,eV$
$E_3 = -1{,}51\,eV$	$E_7 = -0{,}27\,eV$
$E_4 = -0{,}85\,eV$	$E_\infty = 0$

b. ***Correspondance***

E_1 → *minimum d'énergie*

n = 1 est l'état fondamental

$E_\infty \rightarrow$ *maximum d'énergie*

$n = \infty \rightarrow$ *est l'état ionisé.*

c. *Justifions*

$E_1 \neq E_2 \neq E_3 \neq E_4 \neq E_5 \neq E_6 \neq E_7 \neq E_\infty$

A chaque niveau d'énergie correspond une valeur précise de l'énergie alors les niveau d'énergies de l'atome d'hydrogène sont quantifiées.

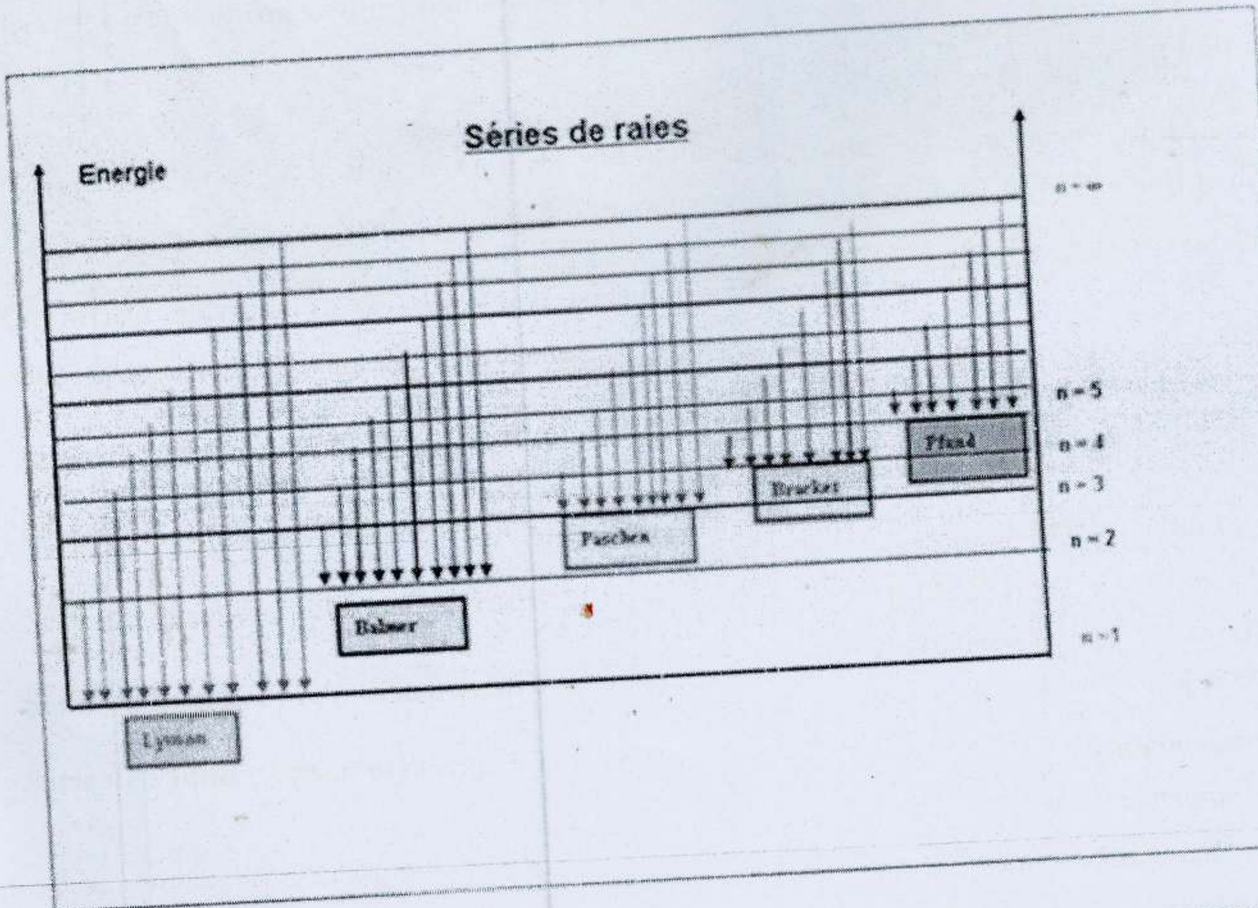
2. a. Le diagramme des énergies.

b. Les séries d'émissions de l'atome d'hydrogène.

Lyman, Balmer, Paschen, Bracket, Pfund.

Représentons les séries.

Nom	n_0	Domaine	Raies limites (Å)
Lyman	1	uv	912-1215
Balmer	2	uv-visible	3647-6563
Paschen	3	IR	8205-18756
Brackett	4	IR	14588-40524
Pfund	5	IR	22794-74599
Humphreys	6	IR	32823-123679



c. *L'état de l'atome d'hydrogène*

$E(1,\ p) = E_p - E_1 = E_p + 13{,}6$

$E(1,\ 2) = E_2 - E_1 = E_2 + 13{,}6 = -3{,}4 + 13{,}6$

$E(1,\ 2) = 10{,}2\ eV$

$E(1,\ 3) = E_3 - E_1 \quad \Rightarrow \quad E(1,\ 3) = 12{,}09\,eV$

$E(1,\ 4) = 12{,}75\,eV$

$E(1,\ \infty) = 13{,}6\,eV$

* $E_1 = 10\,eV \prec 10{,}2\,eV$ *: alors l'électron se situe entre les niveaux 1 et 2.*

* $E_2 = 11{,}2\,eV$

$10{,}2 \prec E_2 \prec 12{,}09\,eV$ *: l'électron se trouve entre les niveaux 2 et 3.*

* $E_3 = 13{,}2\,eV = E_0$ *alors l'atome est ionisé.*

d. **Démontrons**

$$E(p,\ n) = E_p - E_n = -\frac{E_0}{p^2} + \frac{E_0}{n^2}$$

$$E_0\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \quad or \quad E(p,\ n) = \frac{hC}{\lambda}$$

$$\frac{hC}{\lambda} = E_0\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hC}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$R_H = \frac{E_0}{hC} = \frac{13{,}6 \times 1{,}6.10^{-19}}{1{,}98.10^{-25}} \quad \Rightarrow \quad R_H = 1{,}098.10^7$$

R_H *est la constante de Rydberg.*

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

e. **Déduction**

Pour Lyman

$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}098.10^7\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = 1{,}098.10^7\left(1 - \frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0{,}122\,\mu m\ \ (UV)$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 1{,}098.10^7\left(1 - \frac{1}{9}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0{,}102\,\mu m\ \ (UV)$$

$$\frac{1}{\lambda_3} - 1{,}098.10^7\left(1 - \frac{1}{16}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0{,}097\,\mu m\ \ (UV)$$

$$\frac{1}{\lambda_4} = 1{,}098.10^7\left(1 - \frac{1}{25}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0{,}094\,\mu m \ \ (UV)$$

Pour Balmer

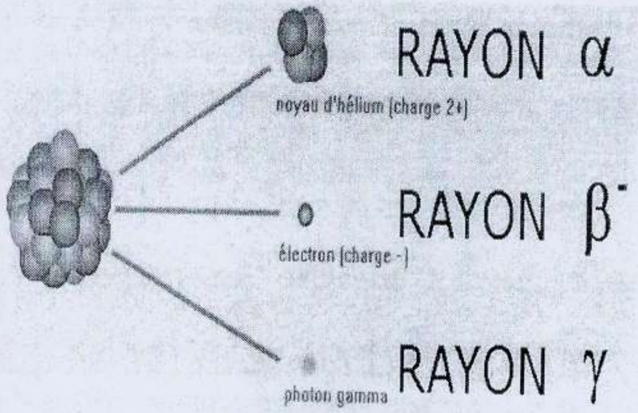
$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}098.10^7\left(0{,}25 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_\alpha} = 1{,}098.10^7\left(0{,}25 - \frac{1}{9}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda_\alpha = 0{,}655\,\mu m \ \ (UV)$$

$$\lambda_\beta = 0{,}48\,\mu m \ \ (UV)$$

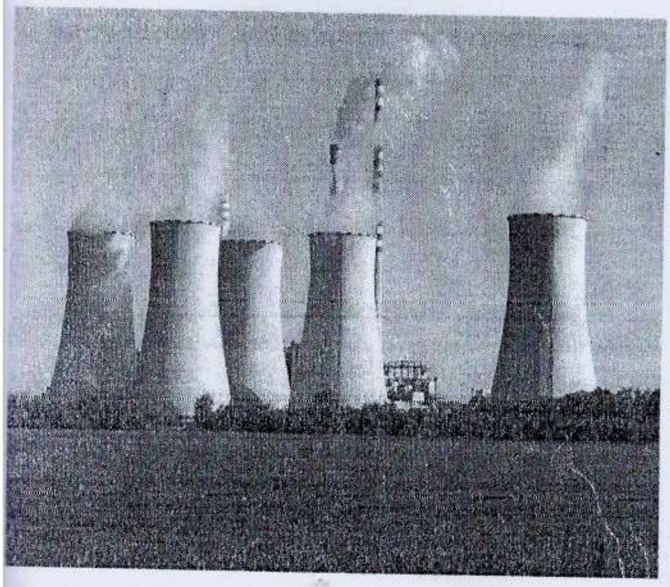
$$\lambda_\gamma = 0{,}43\,\mu m \ \ (UV)$$

$$\lambda_\lambda = 0{,}41\,\mu m \ \ (UV)$$



Risques de radioactivité

RADIOACTIVITE



Situation problème :

Lors d'une conférence internationale sur l'énergie atomique, le conférencier parlait de radioactivité, de noyaux atomiques, d'énergie nucléaire, de relativité et même de bombes en parlant d'uranium enrichi.

Kia et ses amies, étonnées par ces termes veulent comprendre le phénomène de radioactivité, ses propriétés, ses applications et ses dangers.

1. Ce qu'il faut savoir

1.1. Les définitions générales

- **Le noyau atomique :**

Définition :

C'est la partie centrale de l'atome.

Composition :

Le noyau est composé de nucléons : Z protons et N neutrons.

Un noyau atomique est noté : $^{A}_{Z}X$

$$\begin{cases} X : Symbole \\ A = Z + N : Nombre\ de\ masse\ ou\ nucleon \\ Z : Nombre\ de\ protons \\ N : Nombre\ de\ neutrons \end{cases}$$

Le nombre de neutrons est $N = A - Z$

Exemple : $^{238}_{92}U$

Composition : $\begin{cases} Z = 92\ protons \\ N = 238 - 92 = 146\ neutrons \end{cases}$

Défaut de masse : La masse du noyau est inférieure à la masse des nucléons. Le défaut de masse est :

$\Delta m = m(nucléons) - m(noyau)$

$\Delta m = Z_{mp} + (A - Z)m_N - n(noyau)$

- **Un nucléide :** Est un ensemble de noyau ayant même nombre de proton Z
- **Une particule radioactive :** Est une particule émise lors d'une transformation nucléaire. On distingue :

* la particule α : c'est l'hélium $^{4}_{2}He$
* la particule β^+ : c'est positron $^{0}_{1}e$
* la particule β^- : c'est l'électron $^{0}_{-1}e$
* la particule γ : c'est photon
* le neutron : $^{1}_{0}n$
* le proton : $^{1}_{1}p$
* le neutrino : ν
* l'antineutrino : $\overline{\nu}$

Un noyau radioactif : Est un noyau capable de se transformer spontanément en autre noyau avec mission de particules radioactives

Un noyau instable : Est un noyau capable de se désintégrer en un autre.

- **Une famille radioactive :** Est un ensemble de noyau issu de désintégrations successives

Exemple : La famille radioactive de l'uranium 238.

- **La radioactivité**

- Définition :

Est l'émission de particule radioactive par un noyau.

- Propriétés :

La radioactivité est un phénomène naturel, spontané aléatoire et inéluctable.

- Types :

On distingue les radioactivités α, β et γ.

- Les règles de conservation :

Dans une réaction nucléaire, il y a conservation des nombres de masse A, conservation des charges Z et conservation d'énergie.

- **Radioactivité α :**

Est l'émission de particule α par un noyau.

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A_1}_{Z_1}Y + {}^{4}_{2}He$$

$$\begin{cases} A_1 + 4 = A \\ Z_1 + 2 = Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = A - 4 \\ Z_1 = Z - 2 \end{cases}$$

Exemple :

$${}^{238}_{92}U \xrightarrow{\alpha} Th$$

$${}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{A}_{Z}Th + {}^{4}_{2}He$$

$$\begin{cases} A = 238 - 4 = 234 \\ Z = 92 - 2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$${}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$$

- **La radioactivité β^+ :**

Est l'émission de particule β^+ par un noyau.

Exemple :

$${}^{64}_{29}Cu \longrightarrow {}^{A_1}_{Z_1}Ni + {}^{0}_{1}e$$

$$\begin{cases} A = 64 \\ Z = 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$${}^{64}_{29}Cu \longrightarrow {}^{64}_{29}Ni + {}^{0}_{1}e$$

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A_1}_{Z_1}Y + {}^{0}_{1}e + \nu$$

$$\begin{cases} A_1 = A \\ Z_1 + 1 = Z \end{cases} \Rightarrow \quad Z_1 = Z - 1$$

- **La radioactivité β^- :**

Est l'émission de particule β^- par un noyau

$${}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{Z_1}^{A_1}Y + {}_{-1}^{0}e$$

$$\begin{cases} A_1 = A \\ Z_1 = Z + 1 \end{cases}$$

$${}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{Z_1}^{A_1}Y + {}_{-1}^{0}e + \bar{\nu}$$

$$\begin{cases} A = 64 \\ Z = 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$${}_{29}^{64}Cu \longrightarrow {}_{30}^{64}Zn + {}_{-1}^{0}e + \bar{\nu}$$

- **La radioactivité γ :**

La radioactivité γ est l'émission de photon par un noyau excité lors de son retour à l'état fondamental.

Exemple :

$${}_{90}^{234}Th \longrightarrow {}_{90}^{234}Th + \gamma$$

- **Les réactions nucléaires provoquées :**

* Une réaction nucléaire provoquée : est la transformation d'un noyau en un autre sous l'effet de bombardement de particule radioactive (neutron)

* Types : On distingue **la transmutation, la fission et la fusion.**

- **Transmutation :**

Est la transformation d'un noyau père en un noyau fils sous l'action de bombardement de particule radioactive.

L'aluminium ${}_{13}^{27}Al$ sous l'effet de particule α se transforme en phosphore.

$${}_{13}^{27}Al + {}_{2}^{4}He \longrightarrow {}_{15}^{30}P + {}_{0}^{1}n$$

- **La fission :**

Est une réaction nucléaire au cours de laquelle un noyau lourd fissible se divise en deux noyaux légers sous l'effet de bombardement neutronique avec émission d'autres particules :

$${}_{Z}^{A}X + {}_{0}^{1}n \longrightarrow {}_{Z_1}^{A_1}X_1 + {}_{Z_2}^{A_2}X_2 + k{}_{0}^{1}n$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + k = A + 1 \\ Z_1 + Z_2 = Z \end{cases}$$

▪ **La fusion :**

Est réaction nucléaire au cours de laquelle deux rayons légers s'unissent pour donner un noyau plus lourd.

Exemple

$$ {}_{1}^{2}H + {}_{1}^{3}H \longrightarrow {}_{2}^{4}He + {}_{0}^{1}n $$

1.2. Cinétique des transformations nucléaires

Les réactions nucléaires ont les propriétés des noyaux atomiques.

Dans une masse **m** d'un échantillon d'un nucléide **X** de masse atomique **M**, le nombre de noyau

$$N = n \times \mathcal{N}$$

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow N = \frac{m}{M} \times \mathcal{N}$$

- **L'activité d'un échantillon radioactive :** Est le nombre de désintégration par seconde de cet échantillon.

$a = \lambda N$ ou $a = -\frac{dN}{dt}$ (l'unité de a est **Bq** : Becquerel)

- **Loi de décroissance radioactive :** L'activité d'un échantillon contenant initialement un nombre N_0 de noyau radioactive.

$$\begin{cases} a = \lambda N \\ a = -\frac{dN}{dt} \end{cases} \Rightarrow -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

$$-\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \lambda \int_0^t dt \Rightarrow \left[-\ln N\right]_{N_0}^{N} = \lambda t \Rightarrow -\ln N + \ln N_0 = \lambda t$$

$$\ln \frac{N_0}{N} = \lambda t \Rightarrow \frac{N_0}{N} = e^{\lambda t} \Rightarrow$$

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ **Loi de décroissance radioactive.**

$$\begin{cases} N_0 = \frac{m_0}{M'} \mathcal{N} \\ \lambda \ en \ s^{-1} \end{cases}$$

NB : $m = m_0 e^{-\lambda t}$

- **Le temps de demi – vie (ou période radioactive)** : Est le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactives initialement dans l'échantillon se sont désintégrés.

$$AT : N = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \ln \frac{N_0}{\frac{N}{2}} = \lambda t \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} \ (s) \quad ; \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T} \ (s^{-1})$$

1.3. L'énergie nucléaire

1.3.1. Dans le noyau atomique

- **Energie de liaison du noyau :** Est le produit du défaut de masse par le carré de la célérité.

$$\begin{cases} \Delta m = \text{défaut de masse en } Kg \\ C = \text{célérité en } m/s \end{cases} \Rightarrow \quad E_l = \Delta m C^2 \quad (J)$$

Δm peut s'exprimer en **u** ou en **MeV/C²**

$1u = 1{,}67.10^{-27}\ Kg = 931\ MeV/C^2$

Energie de liaison par nucléon : $E_A = \dfrac{E_l}{A}$

Relation d'Einstein : La masse est une forme d'énergie : $E = mC^2$.

Lorsque m est MeV (**m = 234 MeV/C²**) par exemple,

$$E = 234\frac{MeV}{C^2} \times C^2 \quad \Rightarrow \quad E = 234\ MeV$$

1.3.2. Energie lors d'une réaction nucléaire :

- L'énergie disponible est l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau.

$E_d = \Delta m C^2$

Δm = défaut de masse lors de la réaction.

Exemple :

$$^{A}_{Z}X \xrightarrow{R.\ \alpha} {}^{A}_{Z_1}Y + {}^{4}_{2}He$$

$\Delta m = mX - (mY + m\alpha)$

Radioactivité β :

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z\ 1}{}^{1}Y + {}^{0}_{1}e$$

$\Delta m = mX - mY$

$R\gamma$: $\quad E = E_p - E_n = \dfrac{hC}{\lambda}$

Transmutation :

$$^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n$$

$\Delta m = mAl + m\alpha - (mp + mn)$

Fission

$$^{A}_{Z}X + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{A_1}_{Z_1}X_1 + {}^{A_2}_{Z_2}X_2 + k\,{}^{1}_{0}n$$

$\Delta m = (mX + mn) - (mX_1 + mX_2 + kmn)$

Fusion

$$^{A_1}_{Z_1}X_1 + ^{A_2}_{Z_2}X_2 \longrightarrow ^{A}_{Z}X + ^{1}_{0}n$$

$$\Delta m = (mX_1 + mX_2) - (mX + mn)$$

1.4. Applications de la radioactivité :

La radioactivité est utilisé dans plusieurs domaines et notamment :

- **En archéologie :** datation au ^{14}C.

$$a = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad a = a_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{a}{a_0} = e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad -\lambda t = \ln\frac{a}{a_0} \quad \Rightarrow \quad \lambda t = \ln\frac{a_0}{a} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a_0}{a}$$

$$\begin{cases} a_0 = \text{activité d'un échantillon contemporain} \\ a = \text{activité de l'échantillon préhistorique ou } t = \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{N_0}{N} \end{cases}$$

- **Energie électrique :** Centrales nucléaires.
- **En agronomie :** Traceurs d'engrais.
- **En médecine :** Radiographie.

Dans la recherche fondamentale (Physique).

NB :

L'Energie totale libérée lors de la transformation d'une masse m d'un échantillon est :

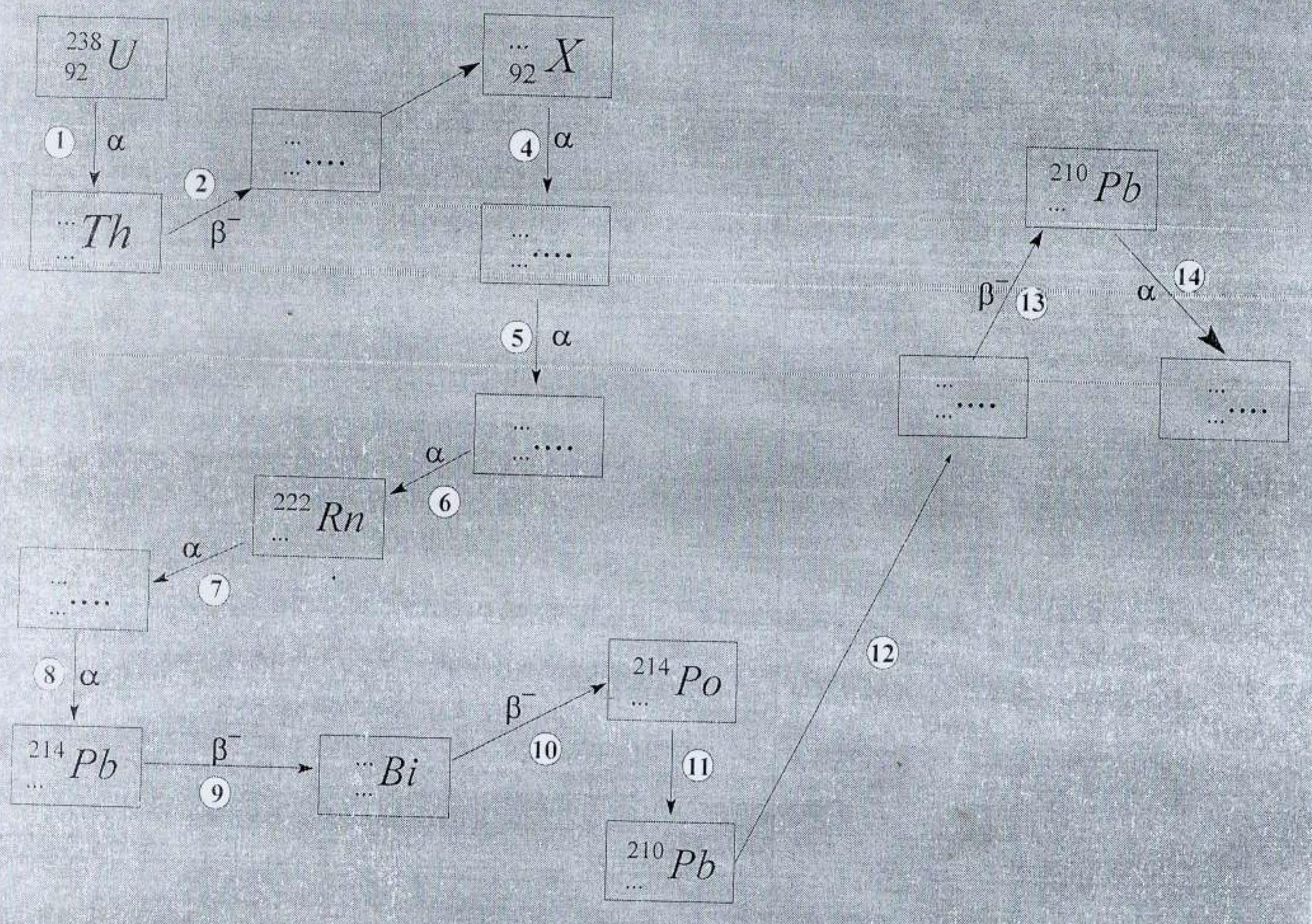
$$E_t = NE_d \text{ (J)} \quad ; \quad N = \frac{m}{M} \times \mathcal{N}$$

2. Ce qu'il faut savoir faire

Application _ 1

La famille radioactive de l'uranium 238 au plomb 206.

Complète le diagramme. Ecrire les équations bilans des réactions 1, 2, 3, 5, 9, 10, 12.



Solution

$$^{238}_{92}U \longrightarrow \ ^{234}_{90}Th + \ ^{4}_{2}He$$

$$^{238}_{90}Th \longrightarrow \ ^{234}_{91}Pa + \ ^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

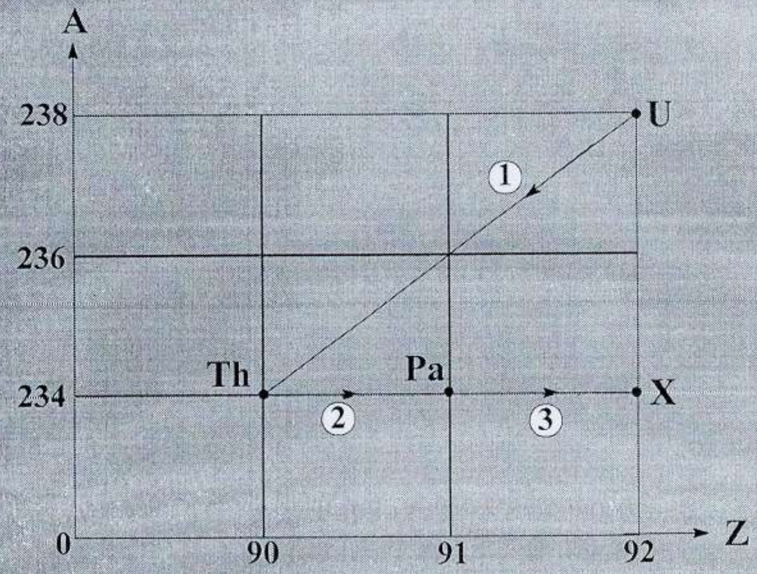
L'élève achèvera la solution en écrivant les équations des réactions nucléaires.

Application _ 2

La famille radioactive de $^{238}_{90}U$

Ecris les équations des réactions (1), (2) et (3).

Précises dans chaque la nature de la radioactivité.



<u>*Solution*</u>

Réaction 1

$$^{234}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He \qquad (la\,radioactivité\ \alpha)$$

Réaction 2

$$^{234}_{90}Th \longrightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu} \qquad (la\,radioactivité\ \beta^{-})$$

Réaction 3

$$^{234}_{91}Pa \longrightarrow {}^{234}_{92}U + {}^{0}_{-1}e + \nu \qquad (la\,radioactivité\ \beta^{-})$$

<u>**Exercice 1 :**</u> ***Réaction nucléaire***

a) Equilibre les équations nucléaires :

$$^{226}_{88}Ra \xrightarrow{\alpha} Rn$$

$^{226}_{88}Ra \longrightarrow\ ^{A}_{Z}Rn +\ ^{4}_{2}He$

$\begin{cases} A+4=226 \\ Z+2=88 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=222 \\ Z=86 \end{cases} \Rightarrow$

$^{226}_{88}Ra \longrightarrow\ ^{226}_{86}Rn +\ ^{4}_{2}He$

b) $^{28}_{13}Al \xrightarrow{\beta^-} Si$

$^{28}_{13}Al \longrightarrow\ ^{A}_{Z}Si +\ ^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$

$\begin{cases} A=28 \\ Z=14 \end{cases} \Rightarrow$

$^{28}_{13}Al \longrightarrow\ ^{28}_{14}Si +\ ^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$

c) $^{53}_{26}Fe \xrightarrow{\beta^+} Mm$

$^{53}_{26}Fe \longrightarrow\ ^{A}_{Z}Mn +\ ^{0}_{1}e$

$\begin{cases} A=53 \\ Z=25 \end{cases} \Rightarrow$

$^{53}_{26}Fe \longrightarrow\ ^{53}_{25}Mn +\ ^{0}_{1}e$

Exercice 2 : ***Désintégration du polonium***

Le polonium 212 se désintègre avec une période égale à 3,3 h. Un échantillon de polonium 212 a une activité de $4,5 . 10^8$ particules par seconde.

. Calcule la constante de désintégration.

.

.1. Quel est le nombre moyen de noyaux radioactifs dans cet échantillon à l'instant où l'on mesure son activité ?

.2. Quelle est la masse de polonium 212 correspondante ?

.

1. Combien restera – t- il de noyaux radioactifs après 10 h ?

2. Quelle sera alors l'activité de l'échantillon ?

Solution

1. Calculons la constante radioactive λ : ^{212}Po

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$\text{AN : } T = 3{,}3h \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{3{,}3} = 0{,}21h^{-1}$$

2.1. Le nombre de noyaux radioactifs

$$a_0 = \lambda N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 = \frac{a_0}{\lambda}$$

$$\text{AN : } \begin{cases} \lambda = 0{,}21h^{-1} = \dfrac{0{,}21}{3600} = 5{,}83.10^{-5}\, s^{-1} \\ a_0 = 4{,}5.10^{8}\, Bq \end{cases}$$

$$N_0 = \frac{4{,}5.10^{-8}}{5{,}83.10^{-5}} = 7{,}71.10^{12} \textit{ noyaux}$$

2.2. La masse de polonium

$$N_0 = n_0 \mathcal{N}$$

$$= \frac{m_0}{M}\mathcal{N} \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{N_0 \times M}{\mathcal{N}}$$

$$\text{AN : } \begin{cases} N_0 = 7{,}71.10^{12} \textit{ noyaux} \\ M = 212\, g/mol \\ \mathcal{N} = 6{,}02.10^{23}\, mol^{-1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{7{,}71.10^{12} \times 212}{6{,}02.10^{23}} \quad \Rightarrow \quad m_0 = 2{,}7.10^{-9}\, g$$

3.1. Le nombre de noyaux restant après 10 h.

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$N = 7{,}71.10^{12} e^{-0{,}21 \times 10} = 9{,}44.10^{11} \textit{ noyaux}$$

3.2. L'activité de l'échantillon

$$a = \lambda N$$

$$AN : 5{,}83.10^{-5} \times 9{,}44.10^{11} = 5{,}50.10^{7}\, Bq$$

Exercice 3 : Désintégration de $^{210}_{83}Bi$ et $^{214}_{83}Bi$

$^{210}_{83}Bi$ et $^{214}_{83}Bi$ sont radioactifs $^{210}_{83}Bi$ émet un rayonnement β^- et à une période de 5 jours. $^{214}_{83}Bi$ émet une rayonnement α.

1. **Dans chaque cas, écrire l'équation de la réaction nucléaire.**
2. **Si à un instant déterminé, on possède une massa $m_0 = 1g$ de $^{210}_{83}Bi$, quelle est la masse de bismuth :**

2.1. 5 jours après cet instant ?

2.2. 10 jours après ?

2.3. 2 ans après ?

Masse de l'atome $^{210}_{83}Bi \approx 210\mu$ avec $1\mu = 1,66.10^{27}$ kg

Solution

1. Equation des réactions

- $^{210}_{83}Bi$

$$^{210}_{83}Bi \xrightarrow{\beta^-} {}^{A}_{Z}X$$

$$^{210}_{83}Bi \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

$$\begin{cases} A = 210 \\ Z - 1 = 83 \Rightarrow Z = 84 \end{cases} \Rightarrow$$

$$^{210}_{83}Bi \longrightarrow {}^{210}_{84}Po + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

- $^{214}_{83}Bi$

$$^{214}_{83}Bi \xrightarrow{\alpha} {}^{A}_{Z}X$$

$$^{214}_{83}Bi \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{4}_{2}He$$

$$\begin{cases} A + 4 = 214 \\ Z + 2 = 83 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 210 \\ Z = 81 \end{cases} \Rightarrow$$

$$^{214}_{83}Bi \longrightarrow {}^{210}_{81}Tl + {}^{4}_{2}He$$

2. *La masse de $^{210}_{83}Bi$ après :*

2.1. 5 jours après

$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$m = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5}\times 5} = m_0 e^{-\ln 2}$$

$$m = \frac{1}{2} m_0$$

$$m = 0{,}5\, g$$

2.2. 10 jours après

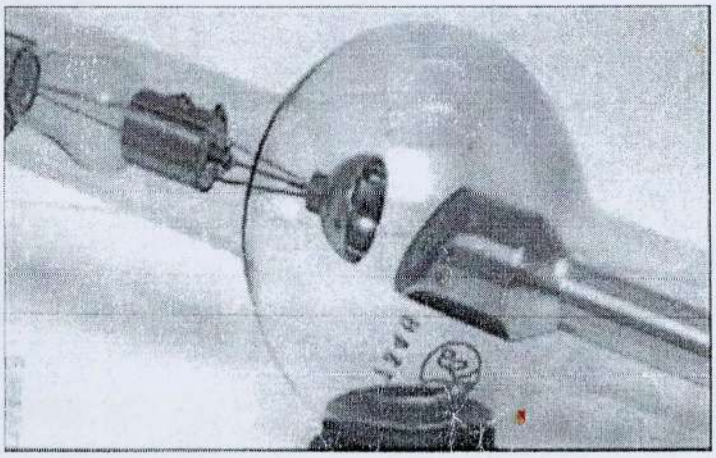
$$m = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5}\times 10} = 1 \times e^{-\frac{\ln 2}{5}\times 10} = 0{,}25 g$$

2.3. 2 ans après

$$m = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5}\times 730} = 1{,}12.10^{-44}\, g$$

$$m = 1{,}12.10^{-44}\, g$$

EFFET THERMOELECTRONIQUE



Situation problème :

Au laboratoire du Lycée Technique de Bamako, les élèves réalisent une expérience au cours de laquelle ils se rendent compte qu'un métal convenablement chauffé émet des électrons.

Ils se posent des questions et veulent bien comprendre ce phénomène et s'approprier ses domaines d'application.

NB : Il existe des polyodes toutes utilisé pour le redressement des tensions variables.

Une triode est constituée de deux filaments et une plaque.

Questions

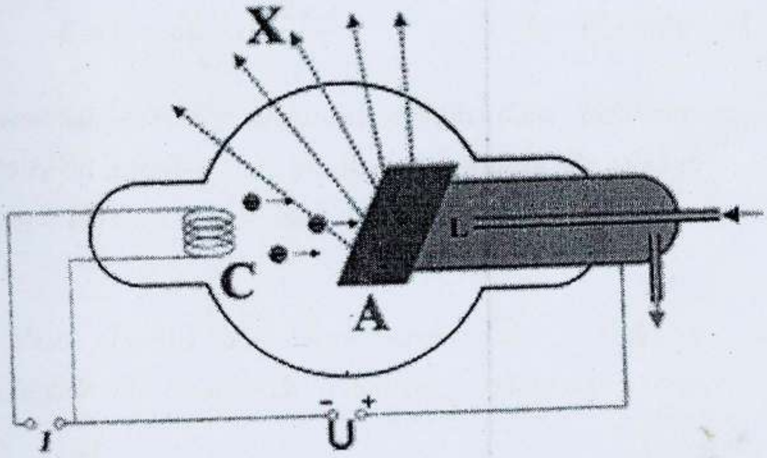
Décris une expérience permettant de produire et de mettre en évidence les rayons X.

Solution

Production :

Les rayons X peuvent être produits en bombardant un métal par des électrons accélérés dans le tube Coolidge.

Le tube de Coolidge est une ampoule à vide où sont placé un filament F et un métal A. Le filament peut être chauffé par une batterie Gc



Fonctionnement :

Lorsque le filament est chauffé il émet des électrons qui accélérés par la tension U vont frapper la plaque A qui émet des rayons X.

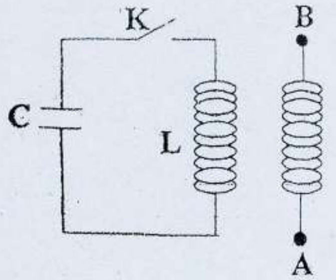
Les rayons X produits peuvent impressionner une plaque photographique.

Questions

Ondes électromagnétiques

1. Décris une expérience permettant de visualiser les radiations visibles et de mettre en évidence l'infrarouge et l'ultraviolet.

2. Définis une antenne dipôle. Décris une expérience de production d'onde électromagnétique à l'aide d'une antenne.



*On obtient une onde électro**magnétique en un point** si en ce point on fait créer deux **champs électrique** $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ **perpendiculaires**, **de mesure** sinusoïdale se propageant simultan**ément à la** même vitesse.*

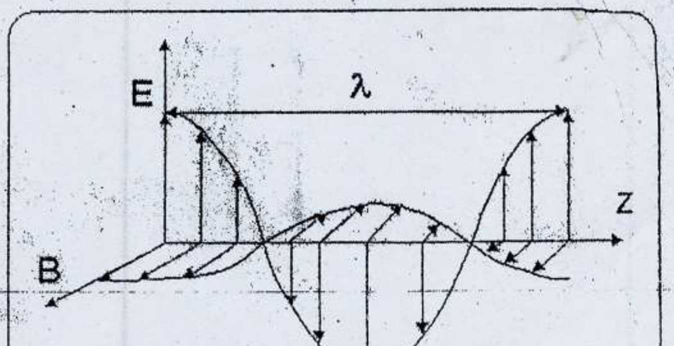
- *Lorsqu'on ferme le circuit LC il y **circule** un courant alternatif sinusoïdal qui **crée un champ** magnétique sinusoïdal qui crée un champ magnétique sinusoïdal. Les lignes de **champ créent** un flux magnétique sinusoïdal dans l'antenne. Cela entraine un mouvem**ent alterné** des électrons tantôt vers B tant vers A. Il se crée un champ électrique $\vec{E}$ parall**èle à l'antenne** de mesure sinusoïdale en un point M situé à la distance x de l'antenne. Sa mesure **est***

$$E = E_m \cos\left(wt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \Rightarrow \quad E = E_m \cos(wt - kx)$$

- *Le mouvement alterné des électrons créent dans l'antenne un **champ magnétique** $\vec{B}$ perpendiculaire à l'antenne et de mesure sinusoïdale. En M sa mesure est :*
  $B = B_m \cos(wt - kx)$

Conclusion :

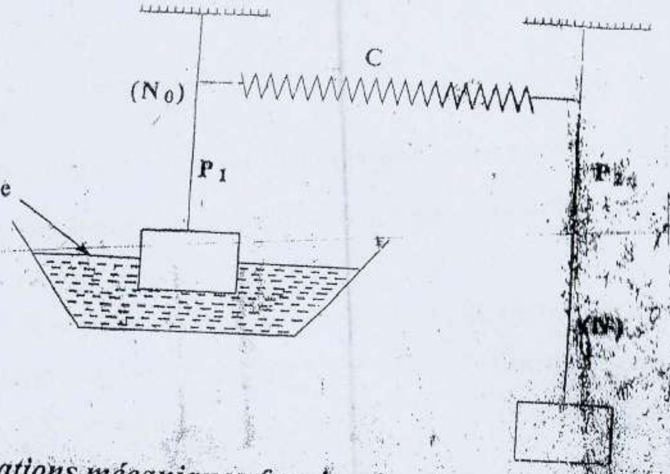
*Au point M : les deux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ **perpendiculaire**, de mesure sinusoïdal se propageant **simultanément dans** le vide à la célérité de la lumière forment une onde électromagnétique en M.*



[redacted]

Solution

On dispose de deux pendules simples P_1 et P_2 de fréquence respective N_0 et N ($N < N_0$) ... couplage élastique. Le solide S de P_1 peut être immergé dans un liquide.



* ***Mise en évidence des oscillations mécaniques forcées :***

- *Le solide S de P_1 est non immergé : lorsqu'on fait osciller P_2, P_1 effectue quelques v... puis s'arrête.*
- *Le solide S de P_1 est immergé : lorsqu'on fait osciller P_2, P_1 se met à osciller à la fréq... Cette fréquence étant différentes de la propre N_0 alors P_1 est en oscillation méca... ique...*

* ***Mise en évidence de la résonance d'élongation***

S étant immergé, faisons osciller P_2 à des fréquences de plus en plus élevées ; on con... l'élongation α de P_1 augmente et devient maximale à α_0 lorsque la fréquence imposée par P... la fréquence propre N_0 de P_1 : c'est la résonance d'élongation.

- *Lorsque que S est légèrement immergé, la courbe réponse possède un maximum poussé : c... résonance aiguë.*
- *Lorsque S est largement immergé, la courbe réponse est plus aplatie : c'est la résonance flou...*